

期权波动率交易之一:期权复制策略及其影响因素分析

期权的波动率交易简介

波动率交易 (Volatility Trading) 是一种通过期权构造的交易策略, 其收益不依赖于标的资产的价格变动方向, 而依赖于标的资产的价格波动情况, 其核心是寻找期权的隐含波动率和市场的实际波动率的价差, 并对其进行相应交易, 换句话说 如果我们预测的波动率与期权的隐含波动率有显著不同, 我们就可以通过相应的期权交易进行获利。

波动率交易最常见的一种交易方式为: 当预测的波动率高于期权的隐含波动率时, 我们可以购买期权 (买入便宜的), 并在标的市场交易现货进行相应的对冲保持 Delta 中性; 或者当预测的波动率低于期权的隐含波动率时, 我们可以卖出相应期权 (卖出贵的), 并在标的市场交易现货进行相应的对冲保持 Delta 中性。此策略 的收益取决与两者的波动率之差。值得一提的是, 波动率交易也称为波动率套利, 是因为此策略也用了当前市场 “不合理” 定价来获利, 但它不是真正的经济学意义上的套利, 因为其收益还取决于预测收益率与实际收益率的偏差, 如果偏差较大, 很可能面临亏损。

所以可见波动率交易能否获利取决于两个因素, 第一是 Delta 对冲的精度, 在组合持有过程中 Delta 对冲越精准, 费用越低, 越有利于收益的获取; 第二是预测波动率与实际波动率的偏差, 即预测波动率越准确, 获利可能性越大。本文主要介绍 Delta 对冲的原理, 基

本方法以及风险点。

期权复制的主要原理和方法

期权复制基于 Black-Scholes-Merton 定价模型利用现货的动态组合对期权进行模拟，力争做到组合的损益与期权基本一致，从而达到复制期权的目的。现实中最常用的期权复制方法为 Delta 对冲法。

Black-Scholes-Merton (BSM) 公式简介

Fisher Black, Myron Scholes 以及 Robert Merton 于 20 世纪 70 年代假设无股息股票在一短时间区间内的收益服从正态分布。

$$dS = uSdt + \sigma Sdz$$

其中：

S 为标的资产价格；

u 为标的资产预期收益率；

σ 为标的资产收益波动率

由 Ito 引理可得标的物的对数收益满足正态分布：

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \Phi\left(\left(u - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

通过构造 Delta 中性组合，使其预期收益率为无风险收益率可推导出 Black-Scholes-Merton 微分方程，结合看涨期权的边界条件可得欧式看涨看跌期权的定价公式如下：

$$F = S * N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S / K) + (r + \sigma^2 / 2) * t}{\sigma \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

对于看涨期权，动态复制的 Delta 值

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial S} = N(d_1)$$

对于看跌期权，Delta 为 $N(d_1)-1$ 。

基于 Black-Scholes-Merton 公式进行期权复制

由 BSM 可见在现实中可以构造一个由标的物 and 现金流组成的头寸对期权进行复制，如对于看涨期权来说，对应的组合头寸如下：

$$C_t = \begin{cases} -1, & \text{无风险收益率现金流 } \Pi \\ +\Delta & \text{股票 } S \end{cases}$$

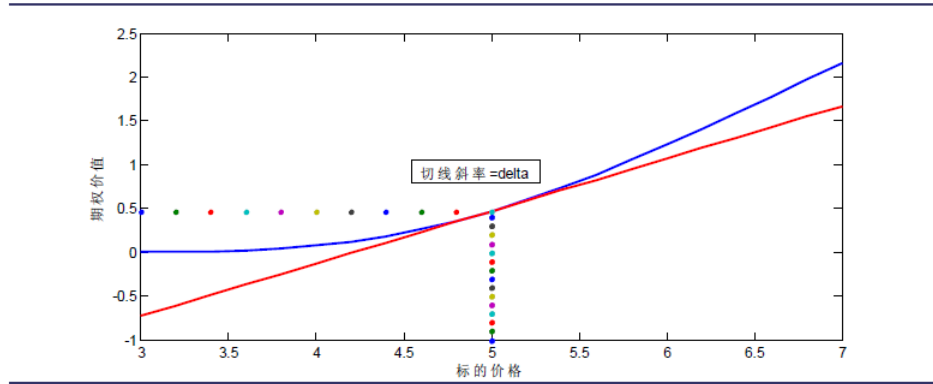
则通过调整 Delta 的值，可以保证此组合在任意时刻的价值之和都等于一份看涨期权的价值，这个是我们利用 BSM 进行期权复制的理论基础。但在现实世界中，实现实时动态复制是不现实的，因为我们无法连续地对复制期权的组合进行实时连续的调整套保，而只能根据需要以一定的频率或者条件（如价格触及到某数值）进行。当然不同的交易员都有各自的方法来决定什么时候调整对冲头寸。在期权定价成为一门学问之后的很长时间内，对冲仍然被称为一门艺术，因为对冲的频率以及出发条件因人而异，总结下来主要有以下几种方法：

1. 以固定时间间隔进行对冲

这是最简单的对冲复制策略，具体做法是在每个固定时段的末尾，我们调整组合使其调整后 Delta 为 0，这个做法通常被一些大型平台所采用，其优点是实施简单，易于理解，但是在选择对冲时间间隔时候显得有些随意。通常来说较高的复制频率将会有更高的精度及较低的风险，但是同时伴随着更高的复制成本。并且实践中对于一周到

期的期权和三个月到期的期权显然应该采用不同的方式进行对冲。

图 1、看涨期权 Delta 值确定方法



2. 对冲至一个 Delta 带

这是做市商通常喜欢采用的一种对冲方式，具体做法是操作者会事先规定一个 Delta 区间，这个区间是操作者能够容忍的最大风险暴露，随着时间的推移如果 Delta 超过这个区间，操作者需要进行调整组合进行对冲操作。通常来说此区间的选择与组合的 Gamma 正负有关，比如若组合的 Gamma 对组合价值 较为有利，则对冲区间可以相对宽松。

最常用的确定 Delta 带的方法是基于效用函数的 Whalley-Wilmott 法，此方法假设交易成本较小，以效用最大为优化目标，得到期权 Delta 值得避险带为：

$$\left[\frac{\partial W}{\partial S} - B_t, \frac{\partial W}{\partial S} + B_t \right], \quad B_t = \left(\frac{3\varepsilon S_t e^{-r(T-t)} \Gamma_t^2}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{3}}$$

相应的避险策略是：

$$y_t = \begin{cases} \Delta_t, & \text{if } y_{t-1} < \Delta_t - B_t \text{ or } y_{t-1} > \Delta_t + B_t \\ y_{t-1}, & \text{if } \Delta_t - B_t < y_{t-1} < \Delta_t + B_t \end{cases}$$

y_t 为相应的避险头寸， γ 为投资者的风险厌恶系数， ε 为交易成本比

率。

Delta 带宽与 Gamma 值关系

假设期权的距离到期日还有半年，交易员的风险厌恶系数为 1，期权的行权价格为 0.5，年化波动率为 30%，无风险收益设定为 0，则由图 1 至 3 可以得出对于平值期权来说，带宽最宽，随着实值虚值水平的增加 Delta 带宽逐渐降低，这是由于平值期权的 gamma 较大，从而可以给予更高的宽容度。

图 2、W-W 与 BSM 方法得到的对冲带比较

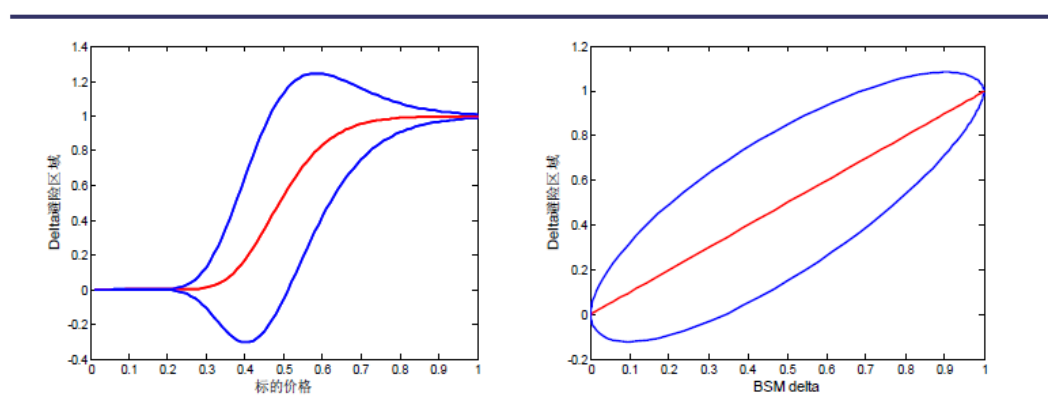
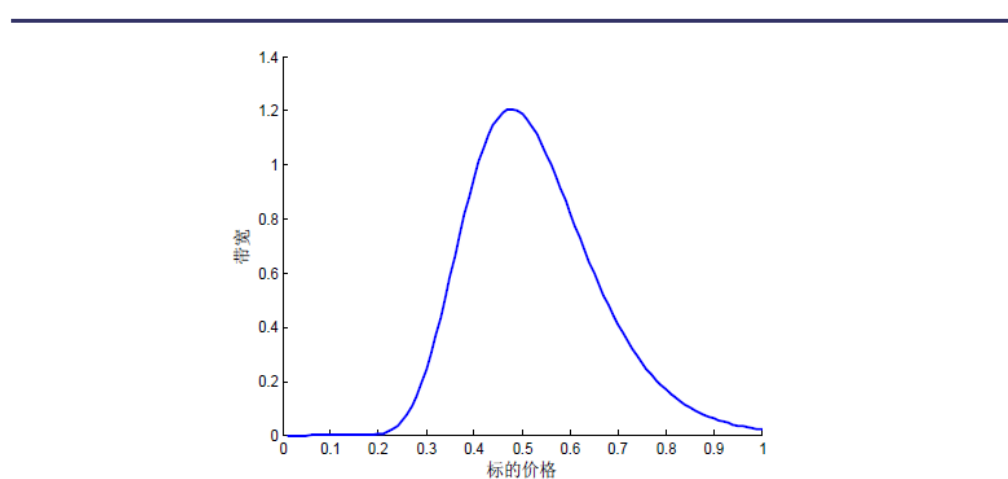


图 3、W-W 方法得到的对冲带宽

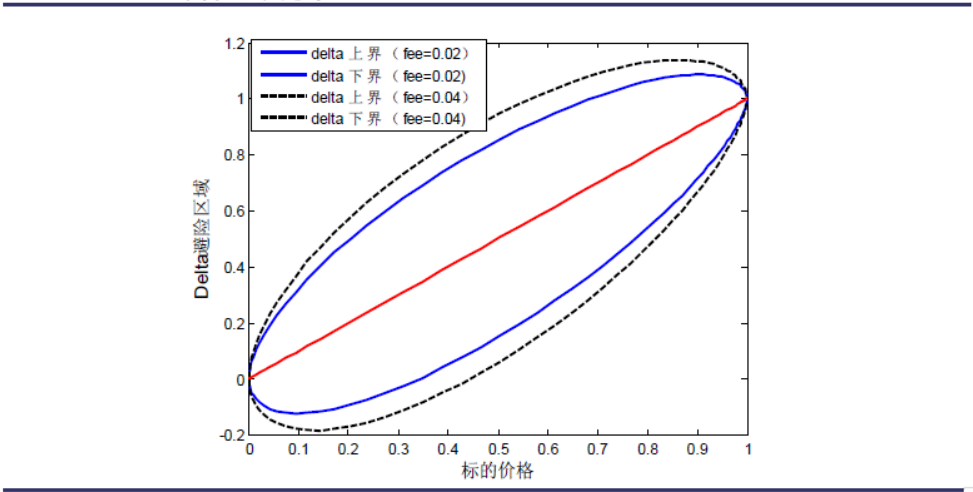


Delta 带宽与交易费的关系

当交易成本降低时，对冲带的宽度会减少，特别的，当交易成本

为 0 时，对冲带就和 BSM Delta 线完全重合。这与我们的直观相符：若交易成本较高，交易者将降低对冲频率，对 Delta 的范围也该有较强的容忍度，从而 Delta 带宽也更加宽松，以免交易成本过高影响了对冲效果。

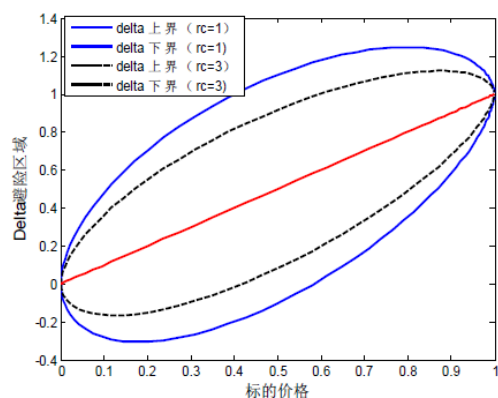
图 4、不同交易费对带宽影响



Delta 带宽与风险厌恶系数的关系

随着风险厌恶系数的上升，对冲带的宽度会减小。这是由于高风险厌恶系数的交易员只能承受少量的风险，所以如果他想要收紧对冲带，从而能够频繁的进行对冲。相反，风险厌恶系数小的交易员的对冲频率会更少一些，他会通过承担更多的地风险来减少对冲成本，当然这些不同的选择并无好坏之分，也就没有正确错误的区别。

图 5、不同风险厌恶系数对带宽影响



期权复制案例及影响因素分析

我们选取 50ETF4 月到期期权，行权价为 2.55 的实值看涨期权 (10000059.SH)，截至 2015 年 3 月 18 日收盘，标的资产 50ETF 价格为 2.596，距离到期日还有 25 个交易日，合约乘数位 10000。我们用近 22 个交易日银行间同业拆借加权利率均值 4.79% 作为无风险利率，假设未来 25 个交易日的实际波动率与过去 25 日的波动率相同 25.35%，根据 BSM 公式可以计算出当前每张合约的理论价格为 1140.5 元。

假设 ETF 交易手续费率为 5%，我们对未来的 50ETF 价格进行模拟 10000 次，并进行 Delta 对冲，可以计算出每个阶段持有标的头寸的损益以及利息费用，此即为复制期权的成本。

以固定时间进行对冲

我们在每天收盘之时对当前现货头寸进行调整，使得当前现货数量为 Delta，则持有的组合的 Delta 为 0，即 Delta 中性（这个调整过程称为再平衡）。组合如下：

$$\begin{cases} -1: & \text{期权} \\ \Delta: & \text{ETF} \end{cases}$$

表 1 和表 2 给出了两个模拟的例子，分别为到期日时期权被行权和不被行权的情况。表 1 中在第 25 日到期时候，Delta 接近 1，对冲者会拥有 10000 份 ETF，期权持有者会在此时行权，对冲者将以行权价 25500 元卖出 ETF，从而总费用为 1040.9 元（26540.9-25500）。

表 1、Delta 对冲模拟（期权最终被行权；对冲成本为 1040.9 元）

天数	ETF 价格	Delta	累计现金流	ETF 持有数量	本期 ETF 变动数目	ETF 手续费	利息费用
0	2.596	63%	16271.4	6268	6268	8.14	15
1	2.604	64%	16679.1	6419	151	0.2	2.2
2	2.562	56%	14635.5	5620	-799	1.02	1.9
3	2.588	61%	15997.3	6145	525	0.68	2.1
4	2.595	63%	16376.5	6290	145	0.19	2.1
5	2.562	56%	14661.7	5620	-670	0.86	1.9
6	2.477	37%	9909.6	3699	-1920	2.38	1.3
7	2.52	46%	12276.8	4638	938	1.18	1.6
8	2.556	55%	14420.5	5475	838	1.07	1.9
9	2.629	71%	18712.7	7107	1631	2.14	2.5
10	2.623	70%	18532.2	7037	-70	0.09	2.4
11	2.635	73%	19299.8	7327	290	0.38	2.5
12	2.601	66%	17434.1	6608	-719	0.93	2.3
13	2.584	62%	16405.5	6209	-399	0.52	2.2
14	2.551	53%	14062.7	5289	-920	1.17	1.8
15	2.59	64%	17071.8	6450	1160	1.5	2.2
16	2.603	69%	18177.4	6874	424	0.55	2.4
17	2.62	74%	19655.2	7437	563	0.74	2.6
18	2.616	74%	19690.4	7449	12	0.02	2.6
19	2.643	83%	22011.5	8326	877	1.16	2.9
20	2.681	93%	24530.4	9264	938	1.26	3.2
21	2.692	96%	25398.5	9585	321	0.43	3.3
22	2.7	98%	26041.5	9822	237	0.32	3.4
23	2.677	99%	26134.4	9855	33	0.04	3.4
24	2.755	100%	26537.4	10000	145	0.2	3.5
25	2.747	100%	26540.9	10000	0	0	0

表 2 中在第 25 日到期时候，Delta 接近 0，对冲者手中没有 ETF，期

权持有者不会在此时行权，期权价值变为 0，从而对冲期权所花费的总费用为 1110.0 元

表 2、Delta 对冲模拟(期权最终不被行权; 对冲成本为 1110.0 元)

天数	ETF 价格	Delta	累计现金流	ETF 持有数量	本期 ETF 变动数目	ETF 手续费	利息费用
0	2.596	63%	16271.4	6268	6268	8.14	15
1	2.579	60%	15481.6	5956	-312	0.4	2
2	2.581	60%	15593.5	5998	43	0.05	2
3	2.562	56%	14621.2	5618	-381	0.49	1.9
4	2.534	50%	13122.1	5025	-593	0.75	1.7
5	2.548	53%	13839.4	5306	281	0.36	1.8
6	2.528	48%	12669.7	4842	-464	0.59	1.7
7	2.562	56%	14662.5	5619	777	1	1.9
8	2.583	61%	15903.1	6098	479	0.62	2.1
9	2.585	61%	16023.1	6144	46	0.06	2.1
10	2.637	73%	19157.7	7331	1187	1.57	2.5
11	2.623	71%	18481.2	7072	-259	0.34	2.4
12	2.662	79%	20763	7928	856	1.14	2.7
13	2.638	75%	19726.3	7534	-394	0.52	2.6
14	2.578	61%	15969.7	6075	-1459	1.88	2.1
15	2.638	77%	20233.8	7689	1615	2.13	2.7
16	2.622	74%	19469.1	7397	-293	0.38	2.6
17	2.581	63%	16530.2	6256	-1140	1.47	2.2
18	2.608	72%	19006.1	7204	948	1.24	2.5
19	2.577	63%	16588.3	6265	-940	1.21	2.2
20	2.636	84%	22119.6	8361	2096	2.76	2.9
21	2.551	52%	14068.7	5202	-3159	4.03	1.8
22	2.561	57%	15446.1	5739	537	0.69	2
23	2.518	30%	8534.5	2992	-2747	3.46	1.1
24	2.536	38%	10515.3	3772	780	0.99	1.4
25	2.495	0%	1110	0	-3772	4.71	0

若模拟 10000 次，则得到 10000 条 ETF 价格路径，对冲费用的分布如下表，可见 10000 次模拟的对冲费用均值为 1180.7 元，和理论之偏差仅仅为 3.53%。略高于理论价值的主要原因在于对冲过程中买卖 ETF 的手续费以及我们无法做到真正的实时对冲。

表 3、Delta 对冲模拟 10000 次（手续费为 5%%）

项目	数值	项目	数值
最小值	628.187	均值	1180.7
25 分位数	1099.611	标准差	137.6
中位数	1175.467	95%置信下限	1178
75 分位数	1255.035	95%置信上限	1183.4
最大值	2111.957	与 BS 偏差	3.53%

将 Delta 对冲至一个避险带

Whalley-Wilmott 模型中所需要确定的参数除了前面提到的共用参数外，还有交易员的风险厌恶系数，这里我们假设交易员的风险厌恶系数为 20，同样蒙特卡罗模拟 10000 次，可得复制期权代价均值为 1167.9 元，与 BSM 理论值偏差为 2.41%，偏差低于 BSM Delta 对冲，但是由于设定了避险带，平均对冲次数由 25 次减少为 23 次，降低了对冲次数。

表 4、W-W Delta 对冲模拟 10000 次（风险厌恶系数 20，手续费 5%%）

项目	数值	项目	数值
最小值	750.538	均值	1167.9
25 分位数	1113.246	标准差	88.7
中位数	1163.935	95%置信下限	1166.2
75 分位数	1217.797	95%置信上限	1169.7
最大值	1688.509	与 BS 偏差	2.41%

若另一交易员风险厌恶系数为 50，表明此交易员对风险承受能力更低，从而增加了对冲次数至 33 次，但与 BS 计算出的理论值得偏差并没有降低，主要是由于由于高频率的对冲消耗了大量的手续费造成的。

表 5、W-WDelta 对冲模拟 10000 次（风险厌恶系数 50，手续费 5%%）

项目	数值	项目	数值
最小值	870.102	均值	1174.3

25 分位数	1128.186	标准差	74.9
中位数	1169.687	95%置信下限	1172.8
75 分位数	1216.854	95%置信上限	1175.8
最大值	1591.166	与 BS 偏差	2.96%

两种方法对比

为了对比复制效果，我们引入复制效率的定义如下：

$$U = \frac{1}{(u_{Sim} - BS) * \sigma_{Sim}} * 10000$$

其中：U 为复制效率；

u_{Sim} 为根据模拟路径进行复制的费用均值；

σ_{Sim} 为根据模拟路径进行复制的费用标准差。

可见复制的效果取决于复制的精度以及稳健性，复制精度越高越稳定则复制效果越好。

风险厌恶系数的影响

在手续费用一定的情况下，不同的风险厌恶系数将影响到对冲的精度，本案例中风险厌恶系数由 20 变为 50 时，由于 Delta 的避险带变窄，从而对冲次数由 23 次升为 33 次，对冲效用效果差别不大。可见风险厌恶系数直接影响到了对冲的频率。

表 6、W-WDelta 对冲模拟 10000 次(风险厌恶系数 50, 手续费为 5%%)

	固定时间	W-W (手续费用 5%%)	风险厌恶系数
		20	50
对冲次数	25	23	33
对冲精度	3.53%	2.41%	2.96%
对冲效用	1.09	4.11	3.95

手续费的影响

由于对冲中买卖现货需要交易费用，从而不管对于固定时间对冲

还是 W-W 来说，交易费用越高，复制效果越差(精度越低，效用越低)，但两种对冲方法来说，无论交易费多少，W-W 方法都有更高的对冲效用。当然天下没有免费的午餐，随着手续费的降低，W-W 对冲次数也在急剧增加，甚至增加到了每天平均有 8 次操作，从而对交易员以及系统的要求更大。

表 7、W-W Delta 对冲模拟 10000 次（不同手续费）

	固定时间		W-W（风险厌恶系数 20）	
	0%%	5%%	0%%	5%%
对冲次数	25	25	199	23
对冲精度	1.53%	3.53%	0.36%	2.41%
对冲效用	4.2	1.09	36	4.11

Delta 期权复制总结及进一步研究展望

Delta 对冲效果影响因素总结

波动率交易是一种通过期权构造的交易策略，其收益不依赖于标的资产的价格变动方向，而依赖于标的资产的价格波动情况，其核心是寻找期权的隐含波动率 and 市场的实际波动率的价差，并对其进行相应交易。期权的复制是波动率交易的重要操作之一，其复制的准确性和稳定性直接关系到波动率交易的成败。

最常见的期权复制方法为 Delta 中性复制，复制成本包含买入现货头寸的总损益以及所用资金的时间成本。但是由于在实际操作中无法做到实时动态复制，从而衍生出不同的复制方法和原则。本文主要介绍了固定时间段对冲以及基于 Delta 安全带对冲两种方法，后者

我们以基于效用最大的 W-W 方法为例展示了 Delta 安全带的确定方法及复制效果。

- 固定时间间隔对冲是在固定时间间隔对当前现货头寸进行调整,使得当前现货数量为 Delta,则持有的组合的 Delta 为 0,即 Delta 中性(这个调整过程称为再平衡)。

- 将 Delta 对冲至一个避险带方法是当 Delta 的值超过一个给定范围时才对现货头寸进行调整,使得组合的 Delta 回归为 0 的方法,如 W-W 方法是基于效用最大确定 Delta 的避险带。

- W-W 对冲模型在手续费一定的情况下,不同的风险厌恶系数将影响到对冲的精度,当风险厌恶系数增大时,由于 Delta 的避险带变窄,从而对冲次数将增加,从而增大了对冲成本。但同时提高了对冲精度。

- 由于对冲中买卖现货需要交易费用,从而不管对于固定时间对冲还是 W-W 来说,交易费用越高,复制效果越差(精度越低,效用越低),但对于固定时间间隔对冲和 W-W 两种对冲方法来说,无论交易费多少,W-W 方法都有更高的对冲效用。当然天下没有免费的午餐,随着手续费的降低,W-W 对冲次数也在急剧增加,从而对交易员以及系统的要求更大。

总结下来两种方法各有优劣,固定时间段对冲好处是操作简单,只需要交易员在固定时间点对当前头寸进行计算并操作,对系统和自动化要求不高。而 W-W 方法考虑到了 Gamma 对复制的影响,希望尽量在复制中能够获利,且综合了手续费对操作的影响,能够在 Gamma

比较有利以及手续费比较高的时候自动降低对冲频率，达到更高的对冲效用。

进一步研究展望

期权的动态复制由于无法做到实时性，所以其既是一门技术同时也是一门艺术，其与交易员的操作风格和风险容忍程度有关，也与市场上的交易成本相关。未来我们认为可以在以下几个方面做出努力：

- 由于通常在期权到期时 Gamma 值有可能变大，从而给 Delta 复制带来难度，若市场中已经有其他期权（如上证 50ETF 期权），则可以通常引入其他期权进行 Gamma 对冲，最终将组合的 Gamma 对冲为 0，增强对冲的稳健性。

- 对冲过程中综合考虑手续费以及 Gamma 的值来确定对冲频率对于改善对冲效果作用明显，从而更多的优化模型可以用于优化 Delta 的对冲避险带。

- 期权复制中最重要的参数是预测波动率，其关系到了 Delta 的数值的精确程度，预测波动率与真实波动率越接近，期权复制的精度越高。从而提高未来市场波动率的预测精度，能够有效提高期权复制的精度。

- 波动率交易是期权交易最重要的策略之一，期权复制的精度则直接决定了波动率交易成败。将高精度的期权复制策略应用于波动率交易中能够更精准的进行波动率套利获利，我们将在后续报告中介绍期权波动率套利策供大家参考。（来源：兴业证券 作者：任瞳，于明明）