ETF 期权凸性套利策略

东莞证券深圳分公司 马国庆

2014-7-25

摘要

通过分析 ETF 期权的定价及凸性，结合我国 ETF 期权全真模拟交易方案，以及融券成本较高，交易的手续费也较高的特点，投资者可建立 ETF 期权的凸性套利策略。投资者在进行期权的凸性套利策略时，不需要融券，只需要在无风险套利机会出现时，才进行套利交易，可操作性较强。

经全真模拟交易环境测试，充分考虑实际交易过程中的费用和冲击成本后的套利次数统计如下，认购期权凸性套利策略：50ETF 认购期权的凸性套利次数为 374 次，180ETF 认购期权的凸性套利次数为 153 次；认沽期权凸性套利策略：50ETF 认沽期权的凸性套利次数为 539 次，180ETF 认沽期权的凸性套利次数为 352 次。

期权合约是指由交易所统一制定的、规定合约买方有权在将来某一时间以特定价格买入或者卖出约定标的证券的标准化合约。买方以支付一定数量的期权费（也称权利金）为代价而拥有了这种权利，但不承担必须买进或卖出的义务。卖方则在收取了一定数量的期权费后，在一定期限内必须无条件服从买方的选择并履行成交时的允诺。

ETF 期权是基于 ETF（Exchange Traded Funds）而设计的一种选择权。标的 ETF 需要用一篮子股票进行申购、赎回，其期权本质是一篮子期权。在交易方式上，ETF 期权与个股期权相似。

上海证券交易所推出的期权全真模拟交易业务方案中，ETF 期权分为认购期权和认沽期权，合约标的为 50ETF 和 180ETF：

项目	**方案**	**项目**	**方案**
行权方式	欧式	**交割方式**	实物
合约月份	下月及随后 2 个季月	**行权价数量**	5 个（1 平价、2 价内与 2 价外）
合约乘数	每张 10000 份	**行权价间距**	3 元以下行权价格间距 0.05 元
交易成本	每张 1 元	**合约调整**	ETF分红，期权行权价和合约乘数进行相应调整，保持合约金额和市值不变
保证金方式	试点期间现金担保，未来扩展至有价证券	**限仓制度**	个人持仓不超过1000张，一般机构不超过5000张（若购买1个月期限的平价期权，上限约250万元)
到期日	合约到期月份的第四	**限购制度**	个人可买入金额不超过客户在证券账

	个星期三		户资产的10%或最近6个月日均持有沪市证券市值的20%
交割日	到期日后一交易日		

1. 期权的定价及性质

期权定价问题一直是西方证券投资理论界研究的焦点问题，直到 1973 年，Black 和 Scholes 根据股价符合几何布朗运动的假定，并且基于一定的假设条件，成功的推导出无现金股利的欧式期权定价的一般公式：

$$C = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left({S_0}/{X}\right) + (r + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left({S_0}/{X}\right) + (r - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

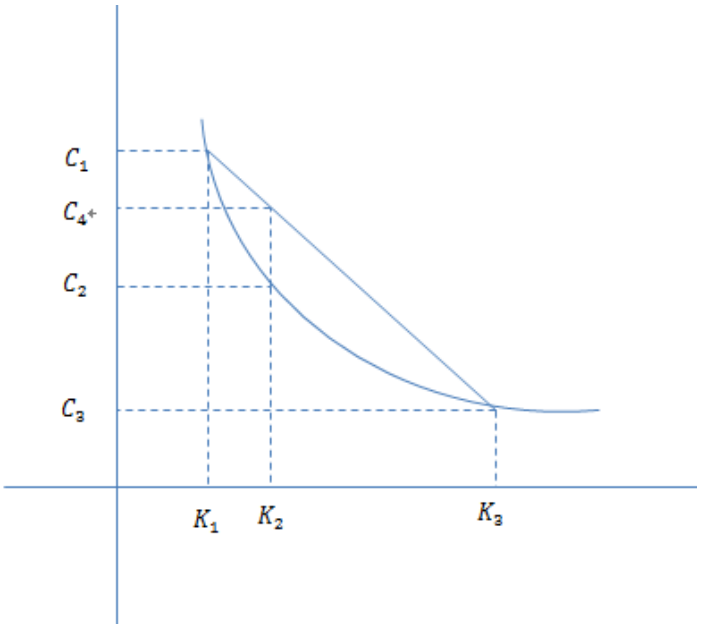
其中，S_0为标的资产的价格，X为执行价格，T为到期日，$N(\cdot)$是标准正态分布函数。

我们主要讨论欧式认购期权，欧式认沽期权的性质类似。期权的价格和 Delta 之间的关系一般用希腊字母 Gamma 表示，Gamma 为期权价格对标的资产价格的二阶导数：

$$\text{Gamma} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} > 0$$

其中，d_1为$\frac{\ln\left({S_0}/{X}\right)+(r+0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$，$N(\cdot)$为标准正态分布函数。

Gamma 可以看作是期权价格随标的价格变动的加速度，由表达式可知 Gamma 恒为正值，即期权价格曲线是凸函数：



其中，C_1，C_2，C_3，K_1，K_2，K_3分别为看涨期权价格及对应的执行价格。

由期权的曲线凸性可知，

$$C_2 < C_4 = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} C_1 + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} C_3$$

对于无风险套利的投资者，可利用期权凸性差价关系建立相应的认购期权凸性策略和认沽期权凸性策略。

针对国内的融券成本较高（融券 ETF 年化费率 8.6%左右），交易的手续费也较高的特点，投资者在选择期权凸性套利策略时，不需要融券，只在无风险套利机会出现时，才进行套利交易，可操作性较强。

2. 认购期权凸性策略

对于相同月份同一到期日不同行权价的认购期权合约，假设K_1为认购期权C_1的执行价，K_2为认购期权C_2的执行价，K_3为认购期权C_3的执行价，且存在关系$(K_1 < K_2 < K_3)$，则需要

满足如下关系，否则投资者就可以获得无风险的利润。

$$C_2 < \lambda C_1 + (1-\lambda)C_3$$

其中，$\lambda = \frac{K_3-K_2}{K_3-K_1}$，$C$为认购期权价格，K为期权的执行价格。

在不考虑成本的情况下，当期权的价格满足关系$C_2 > \lambda C_1 + (1-\lambda)C_3$时，投资者同时卖出$C_2$，买入$\lambda$单位的$C_1$和$(1-\lambda)$单位的$C_3$，就可获得无风险套利机会。投资者在套利组合 t 时以及到期 T 时的资产情况如下表：

认购期权凸性策略

头寸	t时	到期T时			
		$S_T \le K_1$	$K_1 < S_T \le K_2$	$K_2 < S_T \le K_3$	$S_T \ge K_3$
卖出C_2	C_2	0	0	$-(S_T-K_2)$	$-(S_T-K_2)$
买入λC_1	$-\lambda C_1$	0	$\lambda(S_T-K_1)$	$\lambda(S_T-K_1)$	$\lambda(S_T-K_1)$
买入$(1-\lambda)C_3$	$-(1-\lambda)C_3$	0	0	0	$(1-\lambda)(S_T-K_3)$
资产	$C_2-\lambda C_1-(1-\lambda)C_3$	0	$\lambda(S_T-K_1)$	$(1-\lambda)(K_3-S_T)$	0

当认购期权出现$C_2 > \lambda C_1 + (1-\lambda)C_3$关系时，投资者进行的套利组合在t时刻的资产为$C_2-\lambda C_1-(1-\lambda)C_3$大于 0，在到期T时刻，若$S_T \le K_1$，资产为 0；若$K_1 < S_T \le K_2$，资产为$\lambda(S_T-K_1)$大于 0；若$K_2 < S_T \le K_3$，资产为$(1-\lambda)(K_3-S_T)$大于 0；若$S_T \ge K_3$，资产为 0。即投资者在套利t时刻资产为正，到期T仍然为正或 0，即存在无风险套利机会。

投资者在实际套利交易过程中，需要考虑期初与期末交易费用以及保证金的机会成本，假设卖出期权保证金为当前标的价格的 50%，ETF 交易手续费 0.05%，期权交易费为 0.1%，

融券 ETF 年化费率 8.6%，借贷利率年化 3%，以 2014-06-12 上交所 180ETF 购 9 月期权的仿真交易为例：购 9 月 1.85 期权价为 0.105 元，购 9 月 1.95 期权价为 0.200 元，购 9 月 2.05 期权价为 0.026 元，满足认购期权凸性策略：

$$\frac{2.05-1.95}{2.05-1.85}\times 0.105+\left(1-\frac{2.05-1.95}{2.05-1.85}\right)\times 0.026=\frac{1}{2}\times 0.105+\frac{1}{2}\times 0.026=0.066<0.200$$

在实际交易中，$\lambda=\frac{K_3-K_2}{K_3-K_1}=\frac{1}{2}$，则投资者可购建套利组合：买入 1 份购 9 月 1.85 期权价，卖出 2 份购 9 月 1.95 期权价，买入 1 份购 9 月 2.05 期权，则整个套利组合的资产情况为：

		资产
2014-06-12 建立套利组合	买入 1 份购 9 月 1.85 期权	-1050
	卖出 2 份购 9 月 1.95 期权	4000
	买入 1 份购 9 月 2.05 期权	-260
	交易费用	-5.31
	净资产	2684.69
若 2014-09-24 到期日 180ETF 价格为 1.70 元	总收入	2684.69
若 2014-09-24 到期日 180ETF 价格为 1.90 元	行权 1 份购 9 月 1.85 期权	500
	交易费用	-0.5
	总收入	3184.19
若 2014-09-24 到期日	行权 1 份购 9 月 1.85 期权	1500

180ETF 价格为 2.00 元	行权 2 份购 9 月 1.95 期权	-1000
	交易费用	-1.5
	总收入	3183.19
若 2014-09-24 到期日 180ETF 价格为 2.10 元	行权 1 份购 9 月 1.85 期权	2500
	行权 2 份购 9 月 1.95 期权	-3000
	行权 1 份购 9 月 2.05 期权	500
	交易费用	-3
	总收入	2681.69

由上表可知，投资者在 2014-06-12 建立套利组合时净资产为正，无论到期日 180ETF 价格如何，都会取得大于 0 的总收入。所以该无风险套利策略成立。

考虑到 ETF 期权仿真交易的限购制度（个人可买入金额不超过客户在证券账户资产的 10%或最近 6 个月日均持有沪市证券市值的 20%）,在仿真测试时无法根据实际交易情况控制仓位，对仿真测试进行简化处理，只统计在一定条件下凸性套利策略出现的次数。

经全真模拟交易环境测试(不考虑调整的合约）,考虑到交易费用以及交易的冲击成本，当期权C_2的价格大于 0.001，且$\frac{C_2}{\lambda C_1+(1-\lambda)C_3}-1>2\%$时，便用凸性套利策略进行套利。统计出 50ETF 认购期权仿真交易在各月份的凸性套利次数如下表：

50ETF 认购期权月份	凸性套利次数	50ETF 认购期权月份	凸性套利次数
1 月	6	6 月	35
2 月	5	7 月	19

3 月	29	8 月	3
4 月	31	9 月	127
5 月	67	12 月	52
合计	374		

统计出180ETF 认购期权仿真交易在各月份的凸性套利次数如下表：

180ETF 认购期权月份	凸性套利次数	180ETF 认购期权月份	凸性套利次数
1 月	0	6 月	40
2 月	2	7 月	19
3 月	2	8 月	2
4 月	15	9 月	46
5 月	4	12 月	23
合计	153		

3. 认沽期权凸性策略

对于相同月份同一到期日不同行权价的认沽期权合约，假设K_1为认沽期权P_1的执行价，K_2为认沽期权P_2的执行价，K_3为认沽期权P_3的执行价，且存在关系$(K_1 < K_2 < K_3)$，则需要满足如下关系，否则投资者就可以获得无风险的利润。

$$P_2 < \lambda P_1 + (1-\lambda)P_3$$

其中，$\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$，P为认购期权价格， K为期权的执行价格。

在不考虑成本的情况下，当期权的价格满足关系$P_2 > \lambda P_1 + (1-\lambda)P_3$时，投资者同时卖出$P_2$，买入$\lambda$单位的$P_1$和$(1-\lambda)$单位的$P_3$，就可获得无风险套利机会。投资者在套利组合 t 时以及到期 T 时的资产净值情况如下表：

认购期权凸性策略

头寸	t时资产	到期T时资产			
		$S_T \le K_1$	$K_1 < S_T \le K_2$	$K_2 < S_T \le K_3$	$S_T \ge K_3$
卖出P_2	P_2	$-(K_2 - S_T)$	$-(K_2 - S_T)$	0	0
买入λP_1	- λP_1	$\lambda(K_1 - S_T)$	0	0	0
买入$(1-\lambda)P_3$	-$(1-\lambda)P_3$	$(1-\lambda)(K_3 - S_T)$	$(1-\lambda)(K_3 - S_T)$	$(1-\lambda)(K_3 - S_T)$	0
资产净值	$P_2 - \lambda P_1 - (1-\lambda)P_3$	0	$\lambda(S_T - K_1)$	$(1-\lambda)(K_3 - S_T)$	0

当认购期权出现$P_2 > \lambda P_1 + (1-\lambda)P_3$关系时，投资者进行的套利组合在t时刻的资产为$P_2 - \lambda P_1 - (1-\lambda)P_3$大于 0，在到期T时刻，若$S_T \le K_1$，资产为 0；若$K_1 < S_T \le K_2$，资产为$\lambda(S_T - K_1)$大于 0；若$K_2 < S_T \le K_3$，资产为$(1-\lambda)(K_3 - S_T)$大于 0；若$S_T \ge K_3$，资产为 0。即投资者在套利t时刻资产为正，到期T仍然为正或 0，即存在无风险套利机会。

以 2014-03-27 上交所 180ETF 沽 9 月期权的仿真交易为例：沽 9 月 1.85 期权价为 0.144 元，沽 9 月 1.95 期权价为 0.242 元，沽 9 月 2.05 期权价为 0.256 元，满足认沽期权凸性策略：

$$\frac{2.05-1.95}{2.05-1.85} \times 0.144 + \left(1 - \frac{2.05-1.95}{2.05-1.85}\right) \times 0.256 = \frac{1}{2} \times 0.144 + \frac{1}{2} \times 0.256 = 0.20 < 0.242$$

在实际交易中，$\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} = \frac{1}{2}$，则投资者可购建套利组合：买入 1 份沽 9 月 1.85 期权价，

卖出 2 份沽 9 月 1.95 期权价，买入 1 份沽 9 月 2.05 期权，则整个套利组合的资产情况为：

		资产
2014-03-27 建立套利组合	买入 1 份沽 9 月 1.85 期权	-1440
	卖出 2 份沽 9 月 1.95 期权	4840
	买入 1 份沽 9 月 2.05 期权	-2560
	交易费用	-8.84
	净资产	831.16
若 2014-09-24 到期日 180ETF 价格为 1.70 元	行权 1 份沽 9 月 1.85 期权	1500
	行权 2 份沽 9 月 1.95 期权	-5000
	行权 1 份沽 9 月 2.05 期权	3500
	交易费用	-5
	总收入	826.16
若 2014-09-24 到期日 180ETF 价格为 1.90 元	行权 2 份沽 9 月 1.95 期权	-1000
	行权 1 份沽 9 月 2.05 期权	1500
	交易费用	-1.5
	总收入	1329.66
若 2014-09-24 到期日 180ETF 价格为 2.00 元	行权 1 份沽 9 月 2.05 期权	500
	交易费用	-0.5
	总收入	1330.66
若 2014-09-24 到期日 180ETF 价格为 2.10 元	总收入	831.16

由上表可知，投资者在 2014-03-27 建立套利组合时净资产为正，无论到期日 180ETF 价格如何，都会取得大于 0 的总收入。所以该无风险套利策略成立。

经全真模拟交易环境测试(不考虑调整的合约)，考虑到交易费用以及交易的冲击成本，当期权P_2的价格大于0.001，且$\frac{P_2}{\lambda P_1+(1-\lambda)P_3}-1>2\%$时，便用凸性套利策略进行套利。

50ETF 认沽期权月份	凸性套利次数	50ETF 认沽期权月份	凸性套利次数
1 月	5	6 月	122
2 月	15	7 月	10
3 月	44	8 月	5
4 月	60	9 月	120
5 月	65	12 月	93
合计	539		

统计出180ETF 认沽期权仿真交易在各月份的凸性套利次数如下表：

180ETF 认沽期权月份	凸性套利次数	180ETF 认沽期权月份	凸性套利次数
1 月	8	6 月	114
2 月	21	7 月	6
3 月	61	8 月	1
4 月	13	9 月	103

5 月	2	12 月	23
合计	352		