

基于期权价格凸性的无风险套利策略

摘要：本报告基于期权价格的凸性，设计了一种无风险套利策略。通过辨识不符合期权价格凸性条件的期权，发现套利机会并建立套利头寸。报告解释了套利策略的理论基础，具体实施细节以及策略回测结果。策略回测结果显示，该策略可以有效发现无风险套利机会，具有收益稳定，资金回撤小的特点。对于稳定期权市场，促进期权价格回归合理具有积极作用。

期权价格的凸性

欧式认购期权的定价见式(1)

$$\begin{aligned} C(K, T) &= e^{-r(T-t)} E[\max(S(T) - K, 0) | S(t)] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \max(S(T) - K, 0) q(S(T) | S(t)) dS(T) \end{aligned} \quad (1)$$

其中， K 是期权的执行价格， T 是期权的到期时间， $S(t)$ 是标的物的即时价格， $S(T)$ 是标的物在期权到期日的价格， r 是无风险利率， $q(\cdot)$ 是风险中性概率密度。

根据 Breeden, D. 和 Litzenberger R. (1978)，概率密度 $q(\cdot)$ 可以通过求解认购期权价格 C 对行权价 K 的二次偏导数得到，即

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{-r(T-t)} q(S(T)) \quad (2)$$

概率密度 $q(S(T)) \geq 0$ ，在行权价范围内 $q(S(T)) > 0$ ，因此，在通常情况下有

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} > 0 \quad (3)$$

由式(3)可知，期权价格 C 是行权价格 K 的凸函数，即

$$C(\lambda K_1 + (1-\lambda) K_3, T) < \lambda C(K_1, T) + (1-\lambda) C(K_3, T), \quad \forall K_1 < K_3, 0 < \lambda < 1 \quad (4)$$

若令

$$\lambda K_1 + (1 - \lambda) K_3 = K_2 \Rightarrow \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)可得

$$C(K_2, T) < \lambda C(K_1, T) + (1 - \lambda) C(K_3, T), \forall K_1 < K_2 < K_3, \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \quad (6)$$

因此，理论上欧式认购期权价格应当满足式(6)。

当认购期权的市场价格不满足式(6)，将出现套利机会。而在期权到期日，期权价格必定满足式(6)。实际上，令 $C_1 = C(K_1, T)$, $C_2 = C(K_2, T)$, $C_3 = C(K_3, T)$, $S_T = S(T)$ ，在到期日 T ，若期权价格不满足凸性条件(6)，则有

$$C_2 \geq \lambda C_1 + (1 - \lambda) C_3, \forall K_1 < K_2 < K_3, \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \quad (7)$$

此时行权收益

$$R = \lambda (S_T - K_1)^+ + (1 - \lambda) (S_T - K_3)^+ - (S_T - K_2)^+ \quad (8)$$

S_T 有如下可能：

1. $S_T \leq K_1$ ，则 $R = 0$
2. $K_1 < S_T \leq K_2$ ，则 $R = \lambda (S_T - K_1) > 0$
3. $K_2 < S_T \leq K_3$ ，则 $R = \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} (K_3 - S_T) \geq 0$
4. $S_T > K_3$ ，则 $R = 0$

如果式(7)成立，则行权日将存在无风险套利机会，从而引发套利交易导致套利空间消失。因此行权日必有式(6)成立。而在行权日之前，任何不满足式(6)的期权组合均可用以建立套利头寸。

对于欧式认沽期权，根据买卖权平价关系

$$C + Ke^{-r(T-t)} = P + S \quad (9)$$

其中 C , P 分别为具有相同行权价的认购和认沽期权的价格, K 为行权价, r 为无风险收益率, T 为期权到期时间, S 为标的物价格。则

$$C = P + S - Ke^{-r(T-t)} \quad (10)$$

将式(10)代入式(6), 得

$$P(K_2, T) < \lambda P(K_1, T) + (1 - \lambda)P(K_3, T), \forall K_1 < K_2 < K_3, \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \quad (11)$$

式(11)表明认沽期权同样满足凸性条件。因此, 当认沽期权价格不满足式(11)时同样存在套利机会。

考虑资金成本的套利

由期权价格的凸性可知, 当

$$R = C_2 - \lambda C_1 - (1 - \lambda)C_3 > 0, \forall K_1 < K_2 < K_3, \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \quad (12)$$

或

$$R = P_2 - \lambda P_1 - (1 - \lambda)P_3 > 0, \forall K_1 < K_2 < K_3, \lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \quad (13)$$

时存在套利机会。

当入场套利时, 由于保证金占用和交易手续费, 会产生一定的资金成本。因此, 为了获得高于市场无风险收益率 r 的套利收益率, 需要对具体套利条件作进一步分析。假设 t_0 时刻套利所需保证金为 C_p , 权利金收入为 d , 交易手续费为 c , 则总套利所需资金为 $C_p + c - d$ 。

假设在最坏情况下, 需要持仓到期权最后交易日 T 才能平仓获利, 则资金成本为

$(c-d)(e^{r(T-t_0)}-1)+f(C_p(t))$ 。其中 r 为无风险收益率。 $f(C_p(t))$ 是在平仓前，保证金 $C_p(t)$ 所产生的无风险收益。由于保证金 $C_p(t)$ 是标的物价格和期权价格的函数，其变化也具有随机性，故 $f(C_p(t))$ 难以用一个确定函数表达式描述。因此，当

$$R > (c-d)(e^{r(T-t_0)}-1)+f(C_p(t)) \quad (14)$$

时套利可以获得高于市场无风险收益的收益。

对于认沽期权，则当

$$R = P_2 - \lambda P_1 - (1-\lambda)P_3 > (c-d)(e^{r(T-t_0)}-1)+f(C_p(t)) \quad (15)$$

时套利，可获得高于市场无风险收益的收益。

假设保证金在每日收盘时结算，则保证金产生的无风险收益可表示为：

$\sum_{i=1}^{N_T} C_p(t_i) r_0 (1+r_0)^{(t_{N_T}-t_{i+1})}$ ，其中 $t_1 = t_0, t_{N_T} = T$ ， r_0 是按日计算的无风险收益率。由于保证金产生的无风险收益很难精确计算，因此实际交易中可以设置交易成本为 $(c-d + \beta C_p)(e^{r(T-t_0)}-1)$ ，通过设定 β 的值近似保证金产生的无风险收益。

此外，在建立认购（认沽）期权的套利头寸时，卖出 1 手 C_2 (P_2)，同时买入 λ 手 C_1 (P_1) 和 $1-\lambda$ 手 C_3 (P_3)，由式(12)（式(13)）可知，建立头寸的权利金收入为正。

基于期权价格凸性的套利策略

由于理论上认购期权和认沽期权的价格应分别满足式(6)和式(11)，因此当期权价格不满足式(6)或式(11)时存在套利机会。

假设标的物 S 对应的具有相同到期日的期权有 N 个行权价 $K_1 < K_2 < \dots < K_N$ 。

令

$$R_C = C_j - \lambda C_i - (1-\lambda)C_k, \quad \forall i < j < k, \quad \lambda = \frac{K_k - K_j}{K_k - K_i} \quad (16)$$

$$R_p = P_j - \lambda P_i - (1-\lambda)P_k, \quad \forall i < j < k, \quad \lambda = \frac{K_k - K_j}{K_k - K_i} \quad (17)$$

根据式(6)或式(11), 当 $R_C > 0$ 或 $R_p > 0$ 时存在无风险套利机会。为了寻找套利机会, 需要从 N 个具有不同行权价的认购 (认沽) 期权中取出 3 个满足式(16) (式(17)) 的期权进行计算。假定认购 (认沽) 期权 (C_i, C_j, C_k) , $\forall 1 \leq i < j < k \leq N$ ((P_i, P_j, P_k) , $\forall 1 \leq i < j < k \leq N$) 组成一个期权对, 则在每个时间点需要检验的期权对的总数为

$$M = 2 \sum_{n=2}^N \sum_{l=1}^{N-n} l \quad (18)$$

对于认购期权, 入场建立套利头寸的条件是

$$R_C \geq \mu_1 \quad (19)$$

通过设定 μ_1 的值控制交易成本和资金成本对于总盈利的影响。

平仓出场的条件是

$$R_C \leq \mu_2 \quad (20)$$

当式(19)成立时, 理论上卖出 1 手 C_j 买入 λ 手 C_i 和 $(1-\lambda)$ 手 C_k , 但 $\lambda < 1$, 故令

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{N_M}{N_D} \quad (21)$$

其中 N_M, N_D 为满足式(21)的最小正整数, 则当式(19)成立时, 买入 αN_M 手 C_i 和 αN_D 手 C_k , 卖出 $\alpha(N_M + N_D)$ 手 C_j , 正整数 α 用以根据资金状况控制建仓手数。

认购和认沽期权的建仓和平仓规则见表 1

表 1. 无风险套利策略交易规则

	认购期权	认沽期权
建仓条件	$R_C \geq \mu_1$	$R_P \geq \mu_1$
平仓条件	$R_C \leq \mu_2$	$R_P \leq \mu_2$
建仓交易手数	买入 αN_M 手 C_i 和 αN_D 手 C_k , 卖出 $\alpha(N_M + N_D)$ 手 $C_j, i < j < k$	买入 αN_M 手 P_i 和 αN_D 手 P_k , 卖出 $\alpha(N_M + N_D)$ 手 $P_j, i < j < k$
平仓交易手数	卖出 αN_M 手 C_i 和 αN_D 手 C_k , 买入 $\alpha(N_M + N_D)$ 手 $C_j, i < j < k$	卖出 αN_M 手 P_i 和 αN_D 手 P_k , 买入 $\alpha(N_M + N_D)$ 手 $P_j, i < j < k$

由于具有相同到期日的认购或认沽期权的行权价通常多于 3 个,因此在同一个交易时间点,一个期权对中买入的期权在另一期权对中可能是卖出。为了减少交易成本,在某一时间点上期权 C_i 的交易手数应当是其在各个期权对中所确定的交易手数的总和,即

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N_o} \phi_j, N_o = \sum_{n=2}^N \sum_{l=1}^{N-n} l \quad (22)$$

ϕ_j 是该期权在各个期权对中相应的交易手数, $\phi_j > 0$ 表示买入, $\phi_j < 0$ 表示卖出。

策略回测结果

将基于期权价格凸性的无风险套利策略用于上证 50ETF 期权的套利交易。策略参数统一设置为: $\mu_1 = 0.003, \mu_2 = 0, \alpha = 5$, 初始总权益为 1000 万元。交易一手期权即交易 5000 张期权合约。策略回测结果见表 2 和表 3。

表 2. 认购期权回测结果汇总

上证 50ETF 认购期 权	2014 年 7 月	2014 年 9 月	2014 年 12 月
交易时段	2014/05/29-2014/07/15	2014/03/25-2014/07/25	2014/04/25-2014/07/25
行权价格（元）	1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.6	1.3, 1.35, 1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.6, 1.65	1.35, 1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.6, 1.65
总期权对数	330	4760	1235
可套利期权对数	6	390	103
可套利期权对数占 比（%）	1.8182	8.19	8.34
累计计算开仓手数	120	12470	3150
累计实际开仓手数	85	9895	1885
期末总权益（万元）	1000.2	1046.9	1020.6345
策略年化收益率 （%）	0.1815	14.0271	8.2765
最大资金回撤（万 元）	0	4.4125	0.08925
平均每手收益（元）	55	94.6023	218.9337
收益风险比	$+\infty$	10.6289	231.199

表 3. 认沽期权回测结果汇总

上证 50ETF 认沽期 权	2014 年 7 月	2014 年 9 月	2014 年 12 月
-------------------	------------	------------	-------------

交易时段	2014/05/29-2014/07/15	2014/03/25-2014/07/25	2014/04/25-2014/07/25
行权价格（元）	1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.6	1.3, 1.35, 1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.6, 1.65	1.35, 1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.6, 1.65
总期权对数	330	4760	1235
可套利期权对数	4	683	130
可套利期权对数占 比（%）	1.2121	14.35	10.5263
累计计算开仓手数	90	25970	3790
累计实际开仓手数	40	18945	2750
期末总权益（万元）	1000.3	1127.9	1017.4
策略年化收益率 （%）	0.2433	38.2775	6.9706
最大资金回撤（万 元）	0	9.763	1.8648
平均每手收益（元）	156.625	135.066	126.3909
收益风险比	$+\infty$	13.1005	9.4217

表中：

总期权对数：在所有数据采样点上，可供交易的期权对的总和

可套利期权对数：在总期权对数中，满足式(12)或式(13)的期权对的数量

累计计算开仓手数：对每一个期权对进行独立交易，所得到的交易时段内所有期权对的累计开仓手数

累计实际开仓手数：根据式(22)对独立交易的期权对的开平仓进行汇总所得到的交易时段内实际

的累计开仓手数

平均每手收益：(期末总权益-初始总权益) / 累计实际开仓手数

收益风险比：(期末总权益-初始总权益) / 最大资金回撤

数据来源：万得数据库

从回测结果可见，各测试期权品种的收益均为正，9月和12月期权合约的年化收益率均显著大于银行一年期定期存款利率3.25%。七月合约年化收益率低主要原因是交易手数设置太小所致，其最大保证金占用不到初始总权益的0.4%。各合约的最大资金回撤不超过初始总权益的1%。采用式(22)后平均减少交易手数25%左右，从而减少了25%左右的交易手续费。

各回测期权品种的总权益和保证金变化情况及每手收益分布情况见图1--图6。

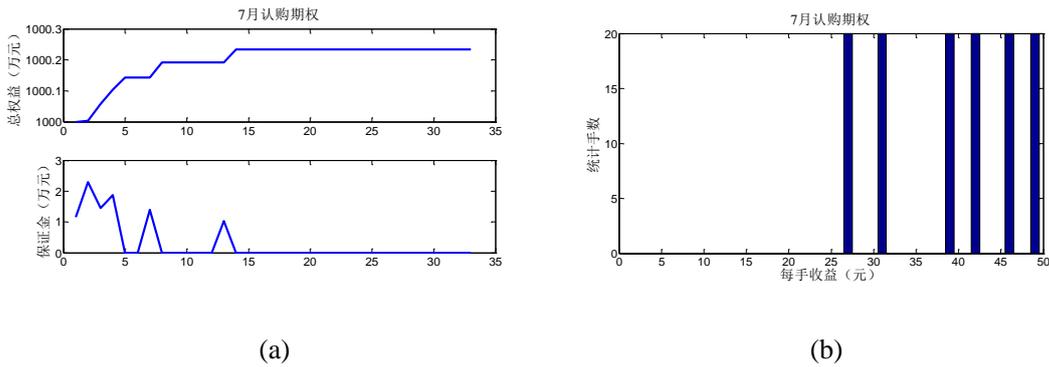


图 1. (a) 7月认购期权总权益和保证金占用变化曲线 (b) 7月认购期权每手收益分布

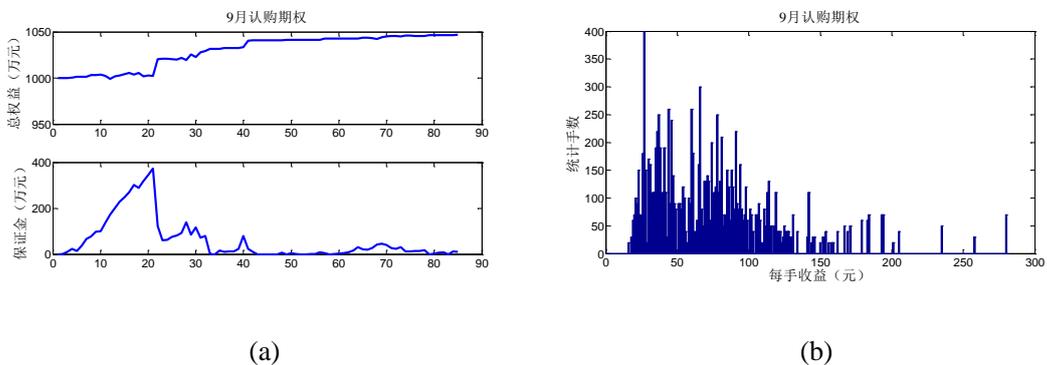
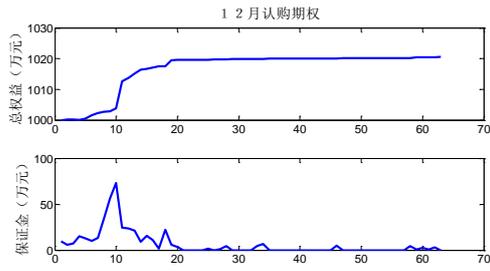
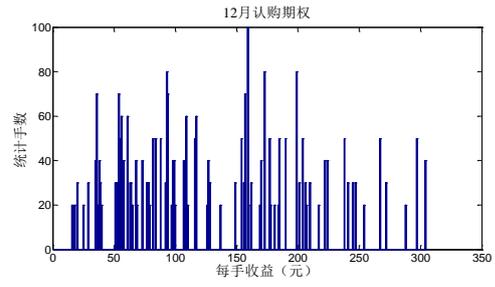


图 2. (a) 9月认购期权总权益和保证金占用变化曲线 (b) 9月认购期权每手收益分布

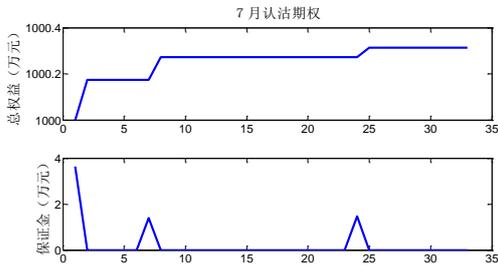


(a)

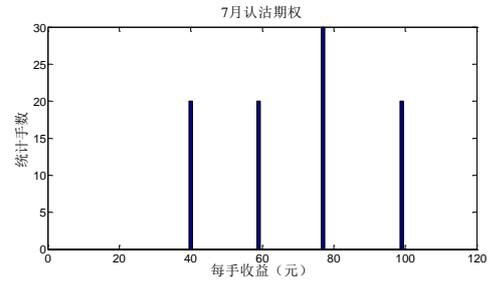


(b)

图 3. (a) 12 月认购期权总权益和保证金占用变化曲线 (b) 12 月认购期权每手收益分布

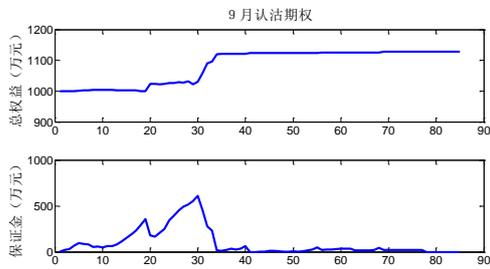


(a)

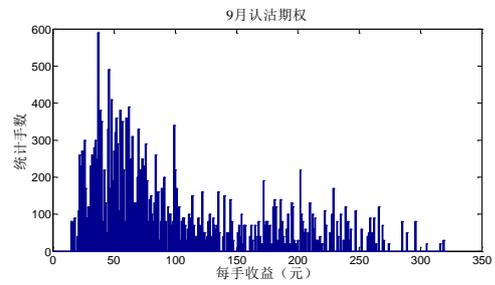


(b)

图 4. (a) 7 月认购期权总权益和保证金占用变化曲线 (b) 7 月认购期权每手收益分布

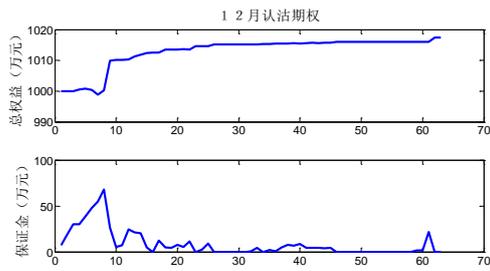


(a)

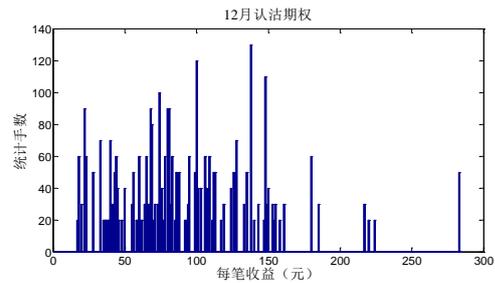


(b)

图 5. (a) 9 月认购期权总权益和保证金占用变化曲线 (b) 9 月认购期权每手收益分布



(a)



(b)

图 6. (a) 12 月认沽期权总权益和保证金占用变化曲线 (b) 12 月认沽期权每手收益分布

从保证金变化曲线可见，策略参数的设置略微保守，7 月和 12 月期权的最大保证金占用不足初始总权益的 1% 和 10%，在这种情况下，可以适当增大 α 的值以增加每次的开仓量，从而提高收益。此外，保证金占用在期权上市的初期显著增长，随着期权到期日的临近而减少，可知无风险套利的机会在期权上市的早期较多，随着期权到期日的临近逐渐减少，这也反映了市场逐步回归理性的过程。由于考虑了交易成本和资金的时间成本，策略回测时固定 $\mu_1 = 0.003$ 。实际上，随着期权到期日的临近，交易资金的时间成本可以忽略，从而可以适当降低 μ_1 的值以发现更多的套利机会，增加收益。从每笔收益统计图可见，每笔交易的收益均为正值，从而也验证了该策略是无风险的。

结语

期权价格的凸性属于期权的内在属性，与该性质违背的市场行情将提供无风险套利机会，在投资者获取无风险收益的同时迫使市场回归合理。因此，基于期权价格凸性的策略不但可以保护投资者利益，还可以有效维护市场的稳定，从而有助于期权市场的长期健康发展。本报告所提出的基于期权价格凸性所设计的交易策略同时考虑了认购和认沽期权的无风险套利，并进一步优化了交易机制。采用上证 50ETF 期权模拟价格进行回测的结果显示，该策略可以有效减少交易成本，获取显著高于市场无风险利率的投资回报率。