

基于 Arbitrage-Free SVI 模型的 期权做市策略

——国信证券另类投资总部

摘要：本文主要提出了一种收益稳定的期权做市交易策略。首先我们对期权波动率曲面进行建立，相对于以往的随机波动率模型不同，我们先对传统的一个常用的 SVI 模型改进成无套利的 SVI 模型，即该模型不存在蝶形和跨期套利空间，再按照该模型建立的隐含波动率曲线进行做市报价，这样可以将套利和做市策略结合。在交易策略和风险控制方面，我们会在一定程度上限制 delta 的风险暴露，同时尽量完全不暴露 vega 风险，同时对于波动率曲面的斜率和曲率变化所带来的风险我们也会部分进行对冲。最后，我们使用 180ETF 期权当月合约的高频数据进行实证分析。

该模型在 180ETF 模拟做市和沪深 300 模拟做市中进行使用

关键字：Arbitrage-Free SVI，无套利原理，风险对冲，180ETF 实证分析

一. 综述

1.1 期权隐含波动率曲线

在期权做市交易中，非常重要的一个环节就是波动率曲面的建立，对于不同的方法，我们所得到的曲线形态相差很大，而这将直接影响我们对风险控制的准确与否。不同的做市机构所建立的曲面也都完全不相同。波动率曲线对期权做市所产生的收益有很大的影响。

1976 年 Black 和 Scholes 提出了著名的 BS 模型，从而我们可以从 BS 模型的定价公式中反解出 BS 隐含波动率，也就是市场的隐含波动率。但是如果我们使用 BS 模型中所反解出来的隐含波动率进行交易，就无法对风险进行很好的控制。问题就在于 BS 公式中假设股票的分布为对数正态分布，即股票的走势符合以下 Ito 过程：

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dW$$

我们可以清楚的看到，式子中假定股票的波动率是固定不变的，由此建立出来的 BS 模型的波动率是一条直线。但是实际中的波动率却是一条曲线，这是由于股票所符合的随机过程的波动率并不是一个常数，而是一个变化的值，股票的分布也并不是对数正态分布，其分布可能具有厚尾性，不对称性和尖峰性。所以为了使模型更加准确，我们必须放弃假设股票价格为对数正态分布。

如果直接使用 BS 公式所求出的市场隐含波动率进行交易，虽然可以有波动率微笑存在，但是由于 BS 模型中所假定波动率是不变的，而市场波动率实际上又不是相同的，这就导致在计算不同期权的 Greeks 上使用了不同的模型，从而使计算出来的风险值与实际的风险值有所偏差，从而在对冲上无法很好的规避掉风险，使做市产生的收益受损。

Cox 和 Ross 在 1976 年又提出 Constant Elasticity of Variance Model，简称 CEV 模型，该模型假设股票的波动符合以下随机过程：

$$dS = \alpha S dt + \sigma S^{b/2} dW$$

可以看出，该模型认为股票波动率的变化是和价格的变化呈现一定联系的，当股票价格上升或者下降时，波动率会向反方向变化。

如果 CEV 模型是正确的，那么股票的价格和波动率的关系将满足如下过程：

$$\ln \left(\text{stdv} \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = \ln \sigma + \frac{\alpha - 2}{2} \ln S_t$$

用股票价格的历史数据通过上式进行回归，我们可以将模型的参数 b 求出，再求出模型的解。然而这个模型并非随机波动率模型，所以对波动率的求解并不是很精确。

而后，Heston 在 1993 年提出了非常著名的 Heston 模型。Heston 模型是随机波动率模型的一种，其认为标的物的波动符合以下随机过程：

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sqrt{V(t)} dW_1$$

$$dV(t) = k(\theta - V(t))dt + \sigma \sqrt{V(t)} dW_2$$

$$dW_1 dW_2 = \rho dt$$

可以看到，该随机过程是一个具有均值回归性质的 Orn-B 过程，从一定程度上解决了上述问题，Heston 模型对波动率的描述更加精确，从而使交易上也更加准确。但是对于做市交易来说，这个还远远不够。做市交易由于对交易速度有非常高的要求，但是 Heston 模型的求解非常复杂，会用到特征方程和傅里叶变换等复杂算法，使时间上并不是非常有效率。

在 2003 年，Hagan, Kumar, Lesniewski 和 Woodward 四人在著名的论文《Managing the smile risk》中提出了 SABR 模型，该模型也是随机波动率模型，SABR 假设标的物的波动率服从如下随机过程：

$$dS = aS^b dW_1$$

$$da = v a dW_2$$

可以看出，在 SABR 模型中，存在波动率的波动率的这样一个关系，对 SABR 模型进行求解可以得到一个非常精确的近似解。同时，SABR 模型的隐含波动率可以表示如下：

$$\sigma_B(K, f) = \frac{a\{1 + [\frac{(1-b)^2}{24} \frac{a^2}{(fK)^{1-b}} + \frac{1}{4} \frac{\rho b v a}{(SK)^{\frac{1-b}{2}}} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2]T\}}{(fK)^{(1-b)/2} [1 + \frac{(1-b)^2}{24} \ln^2 \frac{f}{K} + \frac{(1-b)^4}{1920} \ln^4 \frac{f}{K}]}$$

用该波动率模型建立波动率曲线很容易进行拟合，可以直接使用 MLE 极大似然估计对模型中的三个参数进行求解，算法复杂度较低。

本文中使用 Arbitrage-Free SVI 模型来对波动率曲面进行建立。Stochastic Volatility Inspired(SVI)模型最开始在 2004 年由 Gatheral 提出，是一个仿照随机波动率模型，对波动率曲面进行平滑的一个模型。类似模型于 1999 年左右在 Merrill Lynch 使用，2004 年 Gatheral 在学术界发表论文后该方法得以广泛运用。该模型的性质与 Heston 模型类似，Gatheral 在 2011 年的论文中证明，当到期日趋于无穷大时，Heston 会收敛等价为 SVI 模型。

在 2010 年左右，学术上很多人开始研究 Arbitrage Free 的无套利波动率曲线，即构造出的波动率曲线不存在跨期套利和蝶形套利的机会。使用这类的曲面进行做市的时候，可以将做市和套利结合在一起。研究表明，当一个合约的 total variance 是一个严格递增的函数时，不存在蝶形套利的机会。

在 2013 年，多篇论文将无套利波动率曲线应用于之前的 SVI 模型，得出无套利 SVI 模型，该模型很好的拟合市场波动率的同时，将无套利原理结合进来，使得套利和做市可以同时进行。

1.2 期权做市风险控制

对于期权做市而言，除了需要有很好的波动率曲线之外，对于风险控制也是非常重要的。在做市过程中，gamma 风险所带来损失很小，可以忽略。而除了 delta 和 vega 风险之外，需要进行规避的还有波动率曲面变化的风险，即市场的波动率是一直在变化的，这就会导致波动率曲线也很有可能随之变化，除了上移和下移的变化之外，波动率曲线的斜率和曲率也有可能随之变化。由于做市时的收益为期权的波动率差，所以波动率曲线变化所带来的风险也是不容忽视的。

在本文中，我们对于所有的风险使用期权来进行对冲，将 delta, vega, 波动率曲线斜率和曲率变化的四个风险用一个效用函数结合起来，同时对这个函数进行最优化，从而选出最佳的期权组合来对冲风险。

接下来的第二章我们主要介绍无套利 SVI 模型的建立方法，第三章介绍各种风险的概念和定义，第四章介绍具体的交易策略，即开仓平仓的条件和细节，第五章为 180ETF 和沪深 300 期权合约的实证分析，第六章为总结。

二. 波动率曲线

2.1 SVI 模型

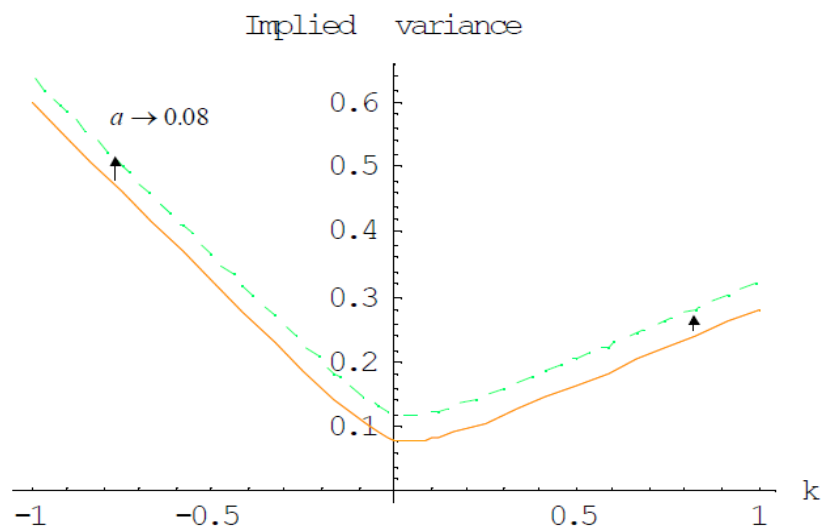
SVI 模型是 2004 年由 Gatheral 在马德里 Global Derivatives & Risk Management 会议上提出的一个很流行的波动率曲线拟合模型。对于任意一个时间点，同一月份合约的期权的波动率曲线可以用以下式子进行拟合：

$$\sigma(k; p) = a + b\{\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2}\}$$

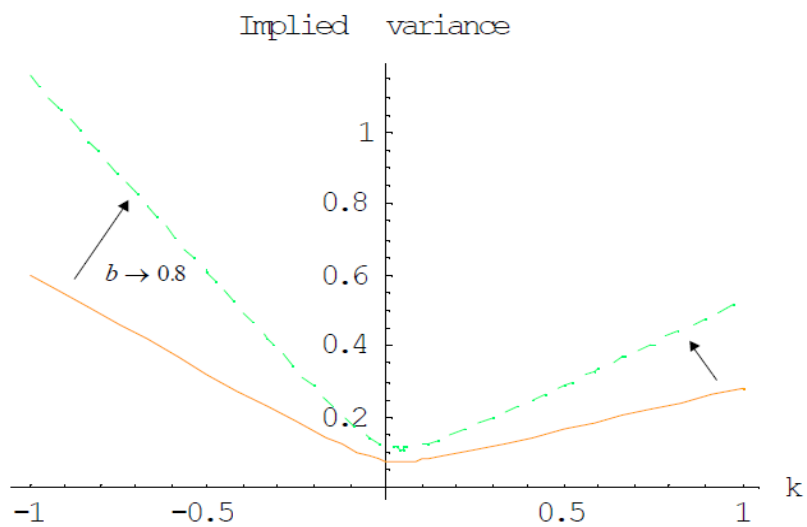
其中 k 为期权的价内外程度，定义为：

$$k = \ln \frac{K}{S}$$

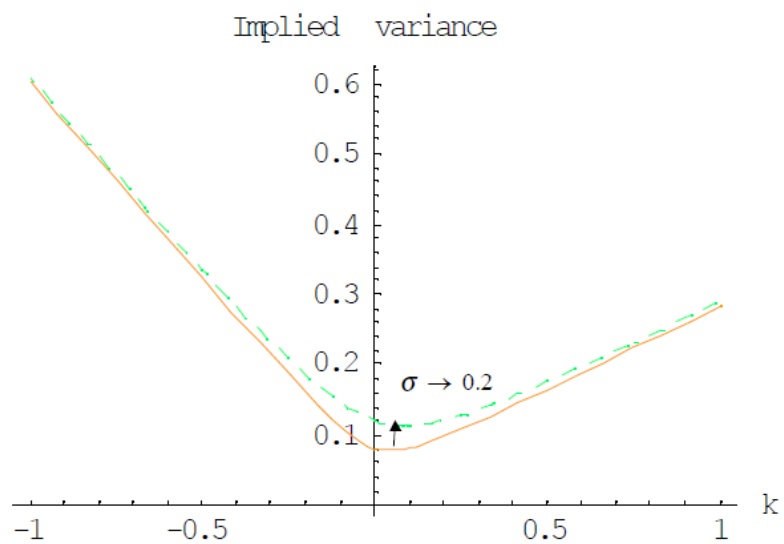
其中除了 k 之外的五个参数可以对波动率曲线的形态进行充分的调整，对于 a 的变换，可以让曲线整体上移或者下移：



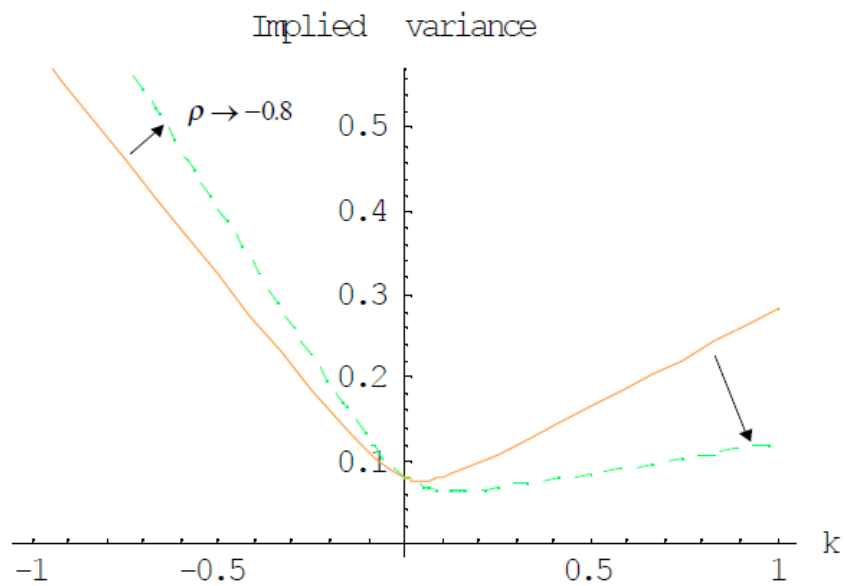
改变 b 可以让曲线左右的张角进行调整：



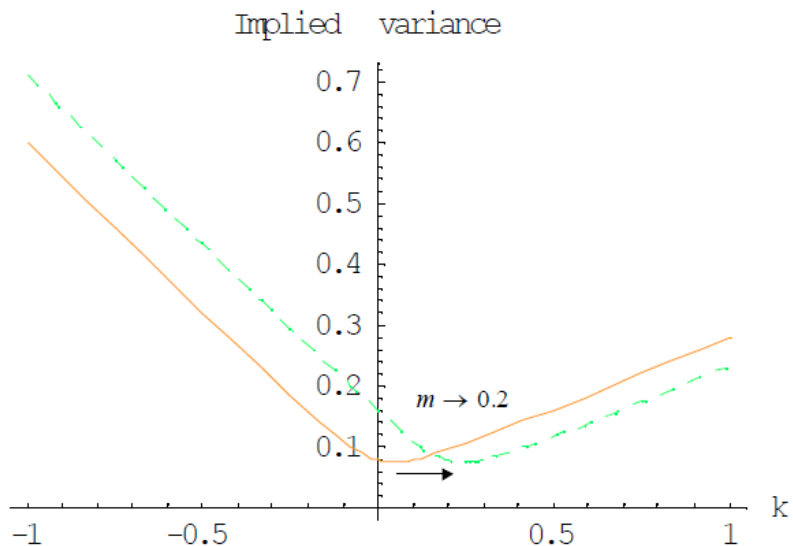
改变 sigma 可以使曲线端点处的平滑度进行调整:



改变 rho 可以对整个曲线的对称性进行旋转调整:



改变 m 可以使波动率曲线进行左右的平移：



根据 SVI 的表达式，在最左端和最右端的波动率方差可以近似为：

$$var_l(k; p) = a - b(1 - \rho)(k - m)$$

$$var_r(k; p) = a + b(1 + \rho)(k - m)$$

由上式可知，该模型满足 Roger Lee 提出的动量公式，即认为方差在极端情况下（极端 ITM 或极端 OTM）会呈现近似线性的变换。从上面可以看出来，该模型的波动率在极端情况下即为线性。同时，当 T 趋于无穷大的时候，Heston 模型会趋于 SVI 模型。这点证明 SVI 对波动率曲线的拟合是近似于随机波动率模型的，但是同时 SVI 模型求解时的算法复杂度远小于随机波动率模型。

2.2 SVI-JW 模型

虽然 SVI 模型的参数对于曲线的变化来说很好理解，但是对于交易来说并没有多大用处，为了使模型参数能够从交易的角度看来更加直观，Gatheral 受到高盛 Tim Klassen 的影响，将参数进行等价变换，从而演变成 SVI-JW 模型：

$$v_t = \frac{a + b\{-\rho m + \sqrt{m^2 + \sigma^2}\}}{t}$$

$$\psi_t = \frac{1}{\sqrt{w_t}} \frac{b}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + \sigma^2}} + \rho \right)$$

$$l_t = \frac{1}{\sqrt{w_t}} b(1 - \rho)$$

$$r_t = \frac{1}{\sqrt{w_t}} b(1 + \rho)$$

$$\tilde{v}_t = \frac{1}{t} (a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2})$$

$$w_t \stackrel{\text{def}}{=} v_t t$$

其中，

1. v_t 代表 ATM 期权的波动率
2. ψ_t 代表 ATM 期权的波动率微笑
3. l_t 代表波动率曲线左端的斜率
4. r_t 代表波动率曲线右端的斜率
5. $\tilde{v}_t$ 代表最小的隐含波动率

波动率曲线的微笑也可以由下面的式子求出：

$$\varphi_t = \left\{ \frac{\partial \sigma(k, t)}{\partial k} \Big|_{(k=0)} \right\}$$

2.3 无套利模型

下面我们来推导期权无套利的条件。期权的套利主要分为两种，一种是跨期套利，一种是蝶形套利。

首先我们证明，对于没有跨期套利的波动率曲线，需要满足的条件是期权的 total variance 是一个严格递增的函数。

证明：假设我们有一个多头的期权 $C_t(K_1, T_1)$ ，同时还有一个 $e^{-\int_{T_1}^{T_2} \Delta dt}$ 空头的 $C_t(K_2, T_2)$ ，其中 Δ 为股票的粉红，这两个期权的价内外程度相同，那么为了使整个组合不存在套利机会，我们需要有：

$$C_t(K_1, T_1) > e^{-\int_{T_1}^{T_2} \Delta dt} C_t(K_2, T_2)$$

将等式两端同时乘以 $e^{-\int_0^{T_2} \Delta dt}$ 并除以 K_2 我们可以得到：

$$\frac{e^{-\int_0^{T_2} r dt} C_t(K_2, T_2)}{K_2} > \frac{e^{-\int_0^{T_1} r dt} C_t(K_1, T_1)}{K_1}$$

最后，注意到等式两端的函数：

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\int_0^T r dt} (K_1, T_1)}{K_1} \\ &= k^{-1} \Phi(d_1) - \Phi(d_2) \end{aligned}$$

可以看出这两个函数仅仅和 k 和 total variance 相关，而这两个期权的价内外程度是一样的，所以等式两端的 k 是相同的，而仅仅 total variance 不同，所以由此我们可以得出，为了使期权波动率曲线不存在跨期套利的机会，我们要求期权的 total variance 必须是严格的增函数。

下面我们证明对于蝶形套利，如果想让波动率曲线不存在套利机会，我们必须让期权的概率密度函数是非负数。

证明：首先我们定义一个函数：

$$g(k) = \left(1 - \frac{k\sigma'(k)}{2\sigma(k)}\right) - \frac{\sigma'(k)^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma(k)} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sigma''(k)}{2}$$

下面我们证明为了满足无套利的条件，我们只需要证明以上函数是非负数即可。注意到期权的概率密度函数可以从 BS 模型中计算出来：

$$p(k) = \frac{\partial C(k)}{\partial K^2} \Big|_{K=Se^k} = \frac{\partial^2 C(k, \sigma)}{\partial K^2} \Big|_{K=Se^k}$$

直接对 BS 公式进行微分我们可以求解出：

$$p(k) = \frac{g(k)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{d_2(k)^2}{2}\right)$$

为了满足上述概率密度函数是非负数，我们可以看到上式中，最右端指数项是大于 0 的，而只要 $g(k)$ 大于等于 0，就可以满足概率密度函数是非负数，由此得证。

2.4 Arbitrage-Free SVI

现在我们已经有了无套利波动率曲线的定义，下面我们来推导无套利的 SVI 模型。首先我们需要对 SVI 的模型稍加修改以便使模型变得更加灵活，同时更加方便我们进行无套利的改进。

我们定义 SSVI 模型为：

$$\sigma(k; \theta) = \frac{\theta_t}{2} \left\{ 1 + \rho \varphi(\theta_t) k + \sqrt{(\varphi(\theta_t) k + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right\}$$

其中 θ 是一个波动率曲线的参数， $\varphi(\theta_t)$ 是用来对曲线形状进行调整的拟合函数。根据上一节的原理，我们可以把 SSVI 模型的参数变换为类似于 SVI-JW 一样的参数，这样便于更加直观的理解：

$$v_t = \frac{\theta_t}{t}$$

$$\psi_t = \frac{1}{2} \rho \sqrt{\theta_t} \varphi(\theta_t)$$

$$l_t = \frac{1}{2} \sqrt{\theta_t} \varphi(\theta_t) (1 - \rho)$$

$$r_t = \frac{1}{2} \sqrt{\theta_t} \varphi(\theta_t) (1 + \rho)$$

$$\tilde{v}_t = \frac{\theta_t}{t} (1 - \rho^2)$$

我们可以通过选择不同的函数 φ 来得到具有不同特征的波动率曲线。

首先我们推导 SSVI 没有跨期套利的条件，如果 SSVI 模型的参数满足以下条件，那么他就是没有跨期套利的：

$$1. \partial_t \theta_t \geq 0, \forall t \geq 0$$

$$2. 0 \leq \partial_\theta \theta \varphi(\theta_t) \leq \frac{1}{\rho^2} (1 + \sqrt{1 - \rho^2}) \varphi(\theta_t), \forall \theta \geq 0$$

证明：对于跨期套利来说，期权的价内外程度并没有关系，所以我们可以假设期权的价内外程度 k 为常数。为了使期权没有跨期套利，根据跨期套利的定义，我们必须有：

$$\partial_t \sigma(k, \theta) = \partial_\theta \sigma(k, \theta) \partial_t \theta_t \geq 0, \quad \forall \theta > 0$$

所以，根据上式，我们很快就可以推出第一条结论，即 $\partial_t \theta_t \geq 0$ 。同时，为了可以满足无跨期套利的条件，我们还必须有：

$$\partial_\theta \sigma(k, \theta) \geq 0, \quad \forall \theta > 0$$

我们对隐含波动率的表达式进行求导得到：

$$\partial_\theta \sigma(k, \theta) = \frac{1}{2} \alpha(x, \rho) + \beta(x, \rho) \gamma(\theta)$$

其中：

$$x \stackrel{\text{def}}{=} k\varphi(\theta_t)$$

$$\gamma(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial_\theta \theta \varphi(\theta_t)}{\varphi(\theta_t)}$$

$$\alpha(x, \rho) = 1 + \frac{1 + \rho x}{\sqrt{x^2 + 2\rho x + 1}}$$

$$\beta(x, \rho) = \rho + \frac{\rho + x}{\sqrt{x^2 + 2\rho x + 1}}$$

现在我们定义一个实数集合：

$$S = \begin{cases} (-\infty, 0) \cup (-2\rho, \infty), & \text{if } \rho < 0 \\ (-\infty, -2\rho) \cup (0, \infty), & \text{if } \rho > 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{if } \rho = 0 \end{cases}$$

现在我们可以求出隐含波动率导数大于 0 的条件为：

$$\partial_{\theta}\sigma(k, \theta) \geq 0 \text{ if and only if } \begin{cases} \gamma \geq -\frac{\alpha}{\beta} & \text{for } x \in S \\ \gamma \leq -\frac{\alpha}{\beta} & \text{for } x \in R \setminus S \end{cases}$$

因为我们可以求出：

$$\sup_{x \in S} -\frac{\alpha}{\beta} = 0 \text{ and } \inf_{x \in R \setminus S} -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(1 + \sqrt{1 - \rho^2})}{\rho^2}$$

最后我们可以得出：

$$\partial_{\theta}\sigma(k, \theta) \geq 0 \text{ if and only if } 0 \leq \gamma \leq \frac{(1 + \sqrt{1 - \rho^2})}{\rho^2}$$

得证。

同样我们可以得出 SSVI 模型没有蝶形套利的条件，如果 SSVI 模型的参数满足以下条件，那么他就是没有蝶形套利的：

1. $\theta_t \varphi(\theta_t)(1 + \rho) < 4$
2. $\theta_t \varphi(\theta_t)^2(1 + \rho) \leq 4$

证明：我们将 SSVI 模型中的隐含波动率函数代入上一节中的 g 函数，得到的表达式为：

$$g(z) = \frac{f(z)}{64(z^2 + 2z\rho + 1)^{3/2}}$$

其中：

$$z = \varphi(\theta_t)k$$

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} a - b\varphi(\theta_t)^2\theta_t - \frac{c}{16} \cdot \theta_t^2 \varphi(\theta_t)^2$$

由上一节我们可以知道，当函数 g 大于 0 的时候，期权的关于价内外的概率密度分布函数大于 0，可以满足无蝶形套利条件，为了使上式中的 g 函数大于 0，我们必须有：

$$0 \leq \theta_t \varphi(\theta_t)^2 \leq \frac{4}{(1 + \rho)}$$

$$0 \leq \theta_t \varphi(\theta_t) \leq \frac{4}{(1 + \rho)}$$

得证。

2.5 无套利模型的求解

对于无套利 SSVI 模型的求解，根据上一节的理论，我们可以得出为了满足无套利的条件，SSVI 模型的参数必须满足如下条件：

$$1. \partial_t \theta_t \geq 0, \forall t \geq 0$$

$$2. 0 \leq \partial_\theta \theta \varphi(\theta_t) \leq \frac{1}{\rho^2} (1 + \sqrt{1 - \rho^2}) \varphi(\theta_t), \forall \theta \geq 0$$

$$3. \theta_t \varphi(\theta_t) (1 + \rho) < 4$$

$$4. \theta_t \varphi(\theta_t)^2 (1 + \rho) \leq 4$$

为了使模型的参数在满足无套利情况下同时可以使其与原模型的参数尽量接近，我们可以使用更加复杂的算法进行优化，使拟合后的价格和实际价格尽量接近的同时对回归中产生蝶形套利的情况加以很大的惩罚值。具体算法可以表示为：

1. 先得出 BS 隐含波动率的中间值，即买入波动率和卖出波动率的二分之一，之后由波动率的中间值用 BS 波动率求出期权价格。
2. 用最小二乘法将最普通的 SVI 模型跟期权的价格进行拟合，并将拟合的结果作为初值。
3. 从 SVI 模型的初值开始，将 SVI 模型的参数逐渐变换，从而最小化期权拟合价格和期权中间价格的差别，在此过程中对套利进行回归的惩罚。

三. 风险控制

3.1 delta 风险

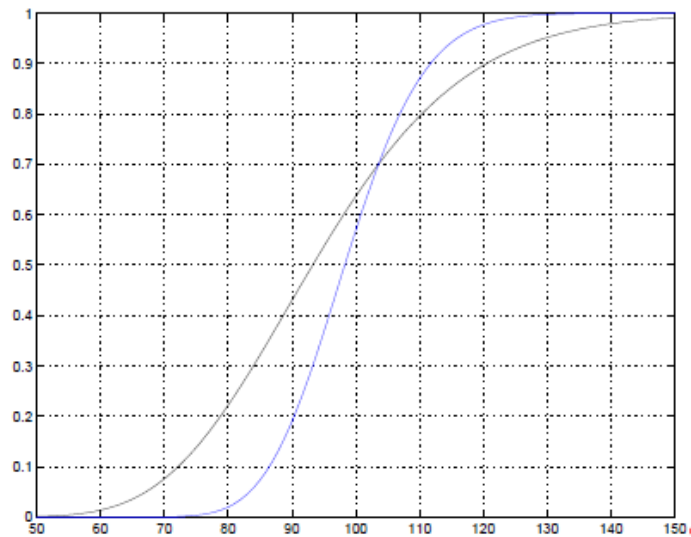
期权的 delta 风险可以由 BS 公式反解，对于看涨期权，其 delta：

$$N(d_1)$$

对于看跌期权，其 delta：

$$N(d_1) - 1$$

一个执行价为 100 的看涨期权，对于不同的到期日，他们的 delta 随着标的物变化的形态为：

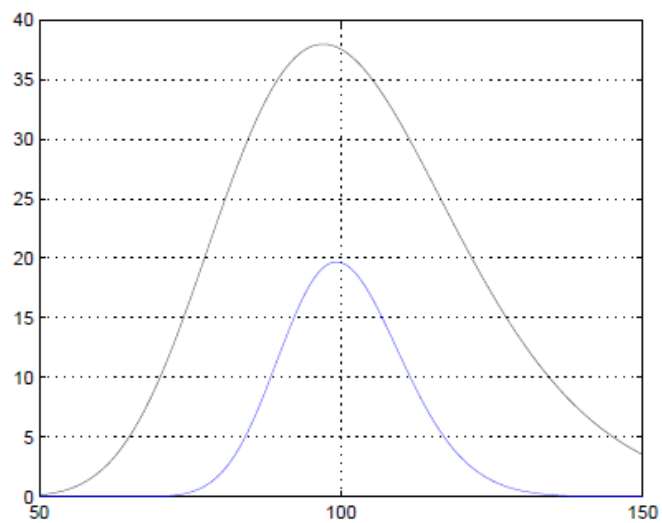


3.2 vega 风险

期权的 vega 风险可以由 BS 公式反解为：

$$SN'(d_1)\sqrt{T-t}$$

对于一个执行价为 100 的，但是不同到期日的期权，其 vega 随着标的物价格的变化如下：



3.3 波动率曲线的斜率和曲率的风险

由第二章节中我们可以知道，波动率曲线的斜率和曲率可以由以下的公式表示出来：

$$\psi_t = \frac{1}{2} \rho \sqrt{\theta_t} \varphi(\theta_t)$$

$$l_t = \frac{1}{2} \sqrt{\theta_t} \varphi(\theta_t) (1 - \rho)$$

$$r_t = \frac{1}{2} \sqrt{\theta_t} \varphi(\theta_t) (1 + \rho)$$

其中 ψ_t 是曲率的数值， l_t 是左端斜率的近似值， r_t 是右端斜率的近似值。

由于我们无法直接拿期权价格对斜率和曲率求导，所以我们只能用逼近法对斜率和曲率的风险进行求解，具体步骤如下：

1. 利用 SSVI 模型求出当波动率斜率或曲率产生微笑变化时的模型参数
2. 得出曲面变化之后各价内外期权的隐含波动率变化
3. 由各期权的隐含波动率的变换推出各期权价格的变化

3.4 风险控制方案

我们将选择期权对风险进行对冲，不使用现货对冲。在对冲过程中，我们最优先对冲的是 vega 风险，保持几乎实时的 vega 中性，同时兼顾 delta 风险，使 delta 风险控制一定范围内，从而让现货的波动不对收益产生较大影响。在

delta 和 vega 风险控制好的情况下，我们也会对波动率曲线的斜率和曲率变化所产生的风险尽量进行对冲。

我们将使用一个效用函数来描述这四种风险的重要程度，在实际交易过程中，我们将对效用函数进行最小化，从而对我们的四种风险的综合风险进行最小化。

四. 交易策略

4.1 效用函数的定义及求解

在这节中我们主要阐述如何对做市所产生的风险进行对冲，由于做市会产生 delta, vega, 以及波动率曲线斜率和曲率的风险等一共四种风险，我们根据四个风险所产生的影响大小，将它们结合起来组成一个 Loss 函数来对这个函数进行最小化。

在做市过程中我们首先按照波动率曲线进行报价提供流动性，并对询价进行回应，由此被动成交会使我们暴露一定的风险。之后我们利用期权对风险进行对冲，以最小化 Loss 函数为目的，我们在被动成交后迅速报单来对冲风险。因为 Arbitrage-Free SVI 波动率曲线是不存在套利的，所以按照该波动率曲线进行交易，我们可以同时把套利和报价结合起来。不需要进行单独的套利策略。我们可以在波动率曲线上进行蝶式套利，同时也不会被反套利。

所以，按照波动率曲线进行报价之后，最重要的就在于对冲掉风险，而如何更好的对冲掉风险就取决于四个风险所组合成的 Loss 函数如何定义。在本文中我们定义风险的 Loss 函数为一个线性函数，即：

$$L = \sum w_i x_i$$

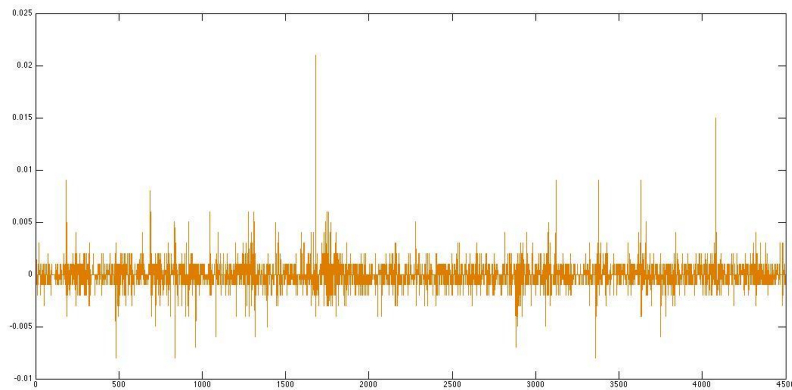
其中 w 是每个风险在 L 函数中所占的权重， i 是对四个风险的标记， w 是根据一定时长的历史数据来推算出这几个风险间的变动关系，然后利用该关系来决定的。

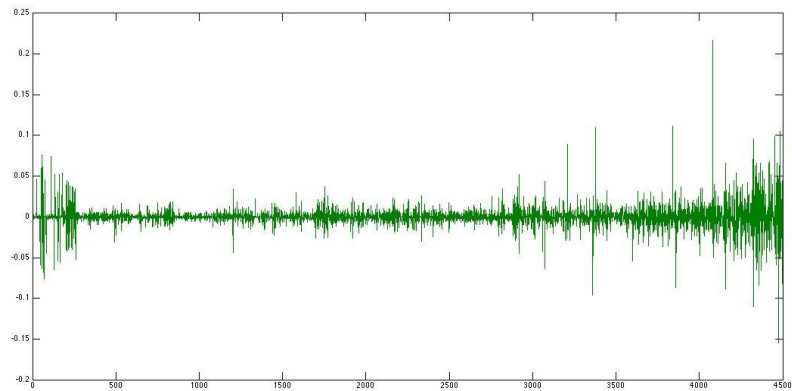
由于在做市交易中，波动率曲线的斜率和曲率的变化对收益的影响要远小于 Δ 和 vega 的影响，对此，我们将线性函数稍作修改，对于 vega 和 Δ 的计算，我们采用二次项，而对于波动率斜率和曲率变化所产生的风险，我们作为类似于惩罚项的一次项，于是现在的 L oss 函数即改为：

$$L = \left(\sum w_i x_i \right)^2 + \sum h_j y_j$$

由于波动率曲线的斜率和曲率的变化所产生的风险并不是很大且相差不多，我们假设他们的系数都是 1，为了确定 L oss 函数中 vega 和 Δ 的系数，我们根据历史数据中 vega 和 Δ 的值，以及隐含波动率和现货（180ETF）变化的情况，来确定他们的系数。

由下图可以看到现货和隐含波动率变化的历史值：





上面两幅图橙色的是现货的历史波动，绿色的是隐含波动率的历史波动，可以看到，现货的波动要比隐含波动率的变化要小，说明 delta 的影响会比 vega 的影响要小，为了精确的找到他们的关系，我们将现货和隐含波动率的变化做一个线性回归：

$$\text{Implied Volatility Change} = \text{beta} * \text{Price Change} + \epsilon$$

我们求得回归的系数，同时也求得 delta 和 vega 的平均值如下表：

回归系数 beta	1.8129
Delta 平均值	0.0857
Vega 平均值	0.1492

通过上表我们可以确定在 Loss 函数中 vega 和 delta 的比例，所以最终确定 Loss 函数为：

$$L = (3.156 * \text{vega} + \text{delta})^2 + \text{slope} + \text{skew}$$

对 Loss 函数的优化是一个非约束的非线性规划问题，我们用期权进行对冲，那么对于一个固定时刻，我们的 Loss 函数就变成：

$$L = \left(3.156 * \left(\text{vega} + \sum w_i v_i \right) + \left(\text{delta} + \sum w_i d_i \right) \right)^2 \\ + \left(\text{slope} + \sum w_i s l_i \right) + \left(\text{skew} + \sum w_i s k_i \right)$$

上式中，delta, vega, slope 和 skew 是连续报价时被动成交的风险值，而 v, d, sl 和 sk 是所有同一月份期权现在的风险值，而 w 是要用于对冲的每个期权所需比例。

所以最终的优化就变成：

$$\underset{w}{\operatorname{argmin}} |L|$$

对于以上表达式，我们使用 Derivative-Free 的优化方法对其进行求解。

4.2 交易策略细节

对于交易策略来说，我们分为两步，第一步是满足做市商义务，对市场进行连续报价并且回应询价，给市场提供充足的流动性，报价按照波动率曲线进行连续报价。第二步是在满足做市商义务之后，对之前的报价时所持有的头寸的风险进行对冲，使 vega, delta, 以及波动率曲线斜率和曲率变化的风险得到充分的控制。为了使做市时可以更加灵活的策略并在一定程度上提高收益，我们的交易系统同时拥有以下的功能：

1. 可以控制报价的速度，即在每秒钟内进行报价的手数进行调整，在成交量较大时可以使报价速度增加，或在成交量减小时减少报价速度。

2. 控制持有期权的净头寸，即买入与卖出期权之和，在他的书中提到，当手中持有的净头寸越少时，做市越容易盈利。而当手中持有的净头寸较多时，浮动盈利较大，同时承担的风险也有可能更大，从而在一定程度上影响做市的获利。

3. 当 vega 值大于或小于一定阈值时，表明手中所持有的单边期权头寸较多，所以暴露了很大的 vega 风险，可能影响到做市的获利。当出现这种情况时，我们会将波动率曲线整体向反方向平移，即当 vega 值较大时，说明买入期权较多，我们会向下平移波动率曲线，反之向上平移。

4. 根据波动率曲线在一定时间内的波动情况来设定一个最小的报价价宽，当市场波动剧烈，波动率曲线形状不稳定或上下波动较大时，最小报价价宽会变大，而当市场比较平稳，波动率曲线形状稳定且没有较大波动时，最小报价价宽减小。

五. 实证分析

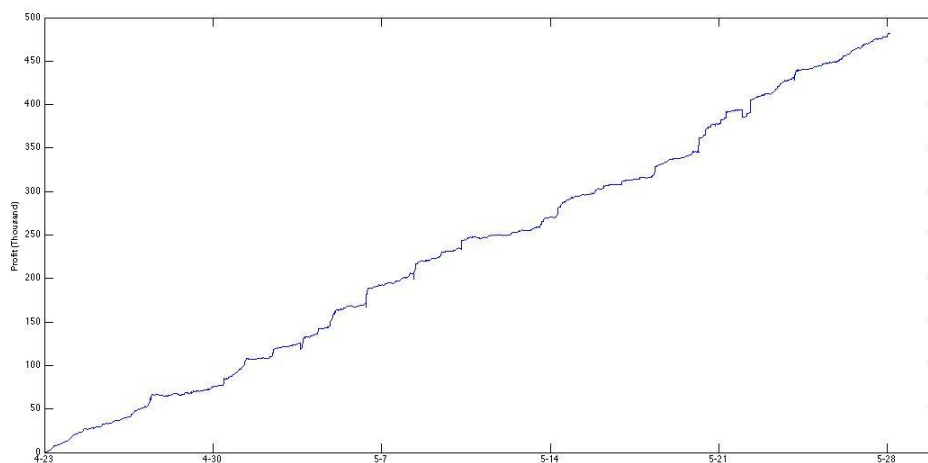
5.1 策略模拟回测

作为主做市商，以上策略正在使用在 180ETF 的模拟盘做市交易中，为了使策略可以更加直观，我们在此取一小段时间的数据来进行示例测试。

选取 180ETF 在 2014 年 5 月合约的数据的所有交易日的高频数据进行测试，从 4 月合约交割后的第二天测试到 5 月合约的交割日。首先我们定义策略回测时交易的假设条件：

1. 使用 180ETF 的实盘和 180ETF 期权的模拟盘为标的物 and 期权
2. 该测试中仅交易 180ETF 期权的当月合约，即 5 月合约
3. 手续费，保证金按照 180ETF 仿真合约来设定
4. 假设冲击成本为 0
5. 假设本金为 1000 万人民币

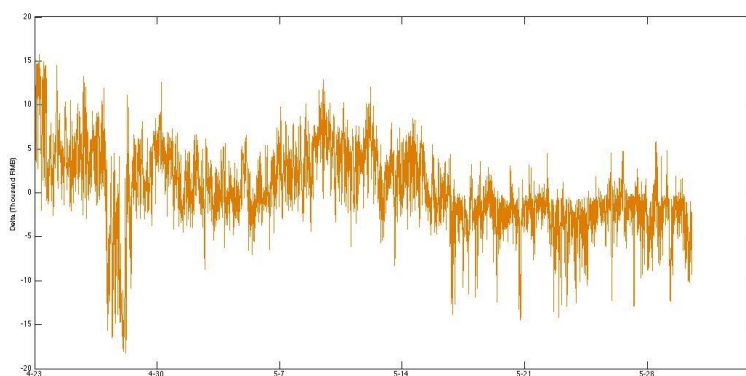
我们可以通过下面的收益率曲线看出，由于很好的对冲掉了风险，该策略几乎没有回撤：

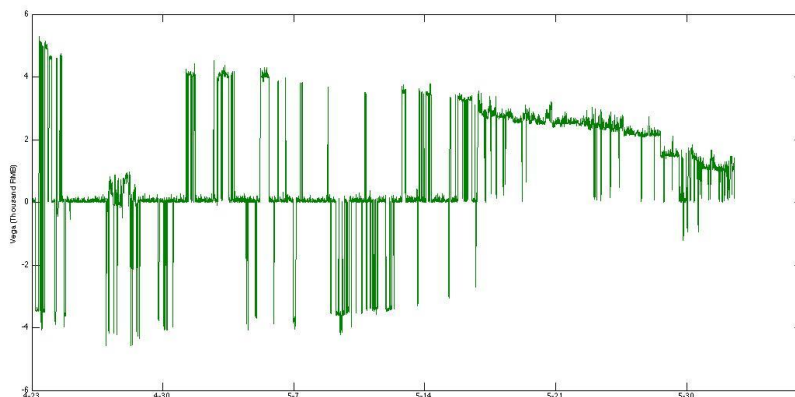


在 4 月 23 日到 5 月 28 日累计一个月零一周的时间里，策略共盈利 48 万元，收益率接近 5%，且最大回撤不超过 0.3%，说明对风险的控制也非常到位。

5.2 风险控制

我们对做市策略的风险值进行了非常严格的控制，对冲掉了相当大一部分 delta 风险，同时几乎完全屏蔽掉了 vega 风险。下面是在策略测试过程中监控的 delta 和 vega 风险的值：





上面两幅图中橙色为 delta 风险，绿色为 vega 风险，从中我们可以看到，delta 和 vega 在整个测试过程中非常的小，由于策略中在 vega 值达到一定程度时，就会对隐含波动率曲线进行上移或下移从而来控制 vega 风险，在稍有偏差之后就会自己调整到正常的范围。

六. 总结

该期权做市策略的主要特点在于利用 SVI 模型建立无套利波动率曲线，SVI 模型建立出的波动率曲线可以非常好的描绘出波动率曲线的形态，同时，Arbitrage-Free 的 SVI 模型可以同时将跨期套利和蝶形套利排除在外，这样按照无套利 SVI 模型进行做市报价，首先可以防止被别人套利，同时也可以把套利的策略和做市的策略融为一体，在做市策略中既可以赚取波动率价差又可以进行套利。

该策略在 180ETF 的模拟交易中也进行了使用，同样也得到了非常好的效果。相比使用 BS 模型的市场波动率策略来说，该策略在风险控制方面来说更加准确，可以更好的规避 delta 和 vega 的风险从而使收益得到提高。

同时，相对于一些比较常用的随机波动率模型如 SABR 和 Heston 模型，该无套利模型由于考虑了套利的因素，因此在根据 Arbitrage-Free SVI 模型进行的报价不会被反套利也同时可以将套利策略和做市策略结合，提高收益。

对于做市交易来说，报价的速度也至关重要，该策略中的 Arbitrage-Free SVI 模型的参数估计速度远比 Heston 模型中的参数估计速度快，同时也在一定程度上比 SABR 模型要更快，使得做市报价的速度可以更快速。

参考文献

- [1]J.Gatheral, A parsimonious arbitrage free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives, *Conference presentation*, Madrid, 2004
- [2]M.Roper, Arbitrage free implied volatility surfaces, 2010
- [3]Gaoyue .G, Antonie.J Claude .M Neufcourt .AL, Generalized arbitrage free SVI volatility surfaces, 2013
- [4]J.Gatheral, The volatility surface: A practitioner' s guide, *Wiley*, 2006
- [5]J.Gatheral, Arbitrage free SVI volatility surface, *Quantitative Finance*, 2014
- [6]P. S. Hagan, D. Kumar, A. S. Lesniewski, D. E. Woodward, Arbitrage free SABR, 2013

- [7] P. S. Hagan, D. Kumar, A. S. Lesniewski, D. E. Woodward, Managing smile risk, *Wilmott Magazine*, Sep, 84–108, 2002
- [8] J. Glaser and P. Heider, Arbitrage free approximation of call price surfaces and input data risk, *Quantitative Finance*, Vol.12, 2012
- [9] Fengler M. R, Arbitrage free smoothing of the implied volatility surface, *Quantitative Finance*, 2009
- [10] R. Lee, The moment formula for implied volatility at extreme strikes, *Mathematical Finance* 14, 469–480, 2004
- [11] R. Lee, Implied volatility: statics, dynamics, and probabilistic interpretation, *Recent advances in applied probability*, Springer, 2005
- [12] M. Avellaneda, From SABR to geodesics, *Conference presentation*, 2005
- [13] F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *The journal of political economy*, 1973
- [14] R. C. Merton, Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of financial economics*, 1976
- [15] S. Heston, A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *The review of Financial studies*, 1993
- [16] J. Cox, Notes on option pricing: Constant elasticity of diffusions, Stanford University, 1975
- [17] Rogers. C and Tehranchi. M, Can the implied volatility surface move y parallel shift? *Finance and Stochastics* 14, 235–248, 2009

- [18]E.Sinclair, Option trading: pricing and volatility strategies and techniques, *Wiley*, 2010
- [19]R. Cont, J.D.Fonseca, Valdo.D, Stochastic models of implied volatility surfaces, *Economic Notes*, 2002
- [20]Kahale.N, An arbitrage free interpolation of volatilities, *Risk*, 17, 102-106, 2004
- [21]L.Andersan and J.Andreasen, Jump diffusion processes:volatility smile fitting and numerical methods for option pricing, *Review of derivatives research*, 2003